Université Toulouse 3 **Année 2017-2018**

Licence 3 ESR - Analyse Numérique

Rappels Algèbre Linéaire - Fiche 2

Éléments propres d'une matrice carrée

Polynôme caractéristique de $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$: $\chi_A(X) = \det(A - XI_n) \in \mathbb{C}_n[X]$

Valeurs propres : Les *valeurs propres* de $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sont les racines du polynôme caractéristique χ_A. Ce sont donc les $\lambda \in \mathbb{C}$ qui vérifient $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = 0$.
La *multiplicité algébrique* d'une valeur propre est sa multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique. L'ensemble des valeurs propres de A est appelé *spectre de A* et sera noté $\mathrm{Sp}(A)$ ou encore $\sigma(A)$.

Vecteur propre : Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, on appelle *vecteur propre de A associé à λ* tout vecteur $X \in \mathbb{C}^n$ **NON NUL** tel que $AX = \lambda X$ (ou encore $X \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$).
On rappelle que si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, alors $\det(A - \lambda I_n) = 0$, ce qui signifie que $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible : il existe donc bien un vecteur $X \in \mathbb{C}^n$ NON NUL tel que $(A - \lambda I_n)X = 0$.

Espace propre : On appelle *espace propre associé à $\lambda \in Sp(A)$* et on note E_λ l'espace vectoriel

$$E_\lambda = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n).$$

Sa dimension $\dim E_\lambda$ est appelée *multiplicité géométrique* de λ. Elle est toujours inférieure ou égale à sa multiplicité algébrique.

Proposition

$\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ si et seulement si il existe un vecteur NON NUL $X \in \mathbb{C}^n$ tel que $AX = \lambda X$. X est alors un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

Exercice 1.

On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le spectre de A.

2. Donner une base (e_1, e_2, e_3) de vecteurs propres de A.

3. Expliciter la matrice A' de l'endomorphisme associé à A dans la base (e_1, e_2, e_3) de deux façons :

1. en utilisant l'écriture de Ae_i dans la base (e_1, e_2, e_3).
2. en explicitant la matrice de changement de base et en utilisant la formule de changement de base.

Exercice 2.

Donner les éléments propres des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. *Matrice compagnon*

Etant donnés n nombres complexes $a_0, \cdots, a_{n-1}$, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

est appelée *matrice compagnon* du polynôme

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n.$$

Montrer que le polynôme caractéristique de A est égal à $(-1)^n P(z)$.

Exercice 4. *Éléments propres et matrices semblables*

1. Montrer que deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique. En déduire qu'elles ont les mêmes valeurs propres.

2. Donner un exemple de deux matrices non semblables ayant le même polynôme caractéristique.

3. Soient A et B dans $\mathbb{C}^{n\times n}$. Monter que AB et BA ont même polynôme caractéristique des deux manières suivantes :

- en utilisant une décomposition de A qui fait intervenir le rang de A.
- en traitant le cas où A est inversible puis en approchant A par une suite de matrices inversibles A_n de la forme $A + t_n I_n$.

Exercice 5.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. Monrer que les valeurs propres de A sont 2 et -1. Donner deux vecteurs propres U et V associés à 2 et -1 respectivement.

2. Montrer que l'ensemble des vecteurs X qui vérifient $AX = 2X$ est la droite engendrée par U.

3. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$, montrer que $AB = BA$.

4. Monter que $A(BU) = 2(BU)$. En déduire que U est un vecteur propre de B. De même, montrer que $A(BV) = -(BV)$, et en déduire que V est un vecteur propre de B. Donner les valeurs propres de B associées à U et V.

Matrices diagonalisables : définition

Une matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est dite *diagonalisable* si elle est **semblable à une matrice diagonale**, c'est à dire qu'il existe une matrice diagonale $D \in \mathbb{C}^{n\times n}$ et une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telles que

$$A = PDP^{-1}.$$

Dans ce cas, $D = diag(\lambda_i)_{i=1\cdots n}$ où les λ_i sont les **valeurs propres de** A et on peut choisir une matrice P dont les vecteurs colonnes $p_1, \cdots p_n$ sont indépendants et où p_i est un **vecteur propre** asssocié à la valeur propre λ_i.

Condition Nécessaire et Suffisante de diagonalisabilité

Une matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est *diagonalisable* si et seulement si

1. $\mathbb{C}^n$ possède une base de vecteurs propres de A
2. pour toute valeur propre de A, les multiplicités algébriques et géométriques sont les mêmes, c'est à dire

$$\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)^{m_i}, \quad \text{et } \forall i = 1\cdots p,\ \dim \operatorname{Ker}(A-\lambda_i I_n) = m_i$$

3. Il existe un polynôme P scindé à racines simples qui annule A : $P(A) = 0$.

Exercice 6.

Reprendre les matrices de l'**Exercice 2** et dire pour chacune si elles sont diagonalisables.

Exercice 7.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. A est-elle diagonalisable ?

2. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de A.

3. Déterminer une base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ orthonormée telle que chaque b_i soit un vecteur propre de A.

4. Déterminer une matrice inversible M telle que la matrice $D = M^{-1}AM$ soit diagonale.

5. Mêmes questions avec la matrice $B = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -5 \\ -2 & 4 & -2 \\ -5 & -2 & 7 \end{pmatrix}$.

Exercice 8.

Déterminer si la matrice $A = (a_{ij})_{ij}$ définie par $a_{ij} = ij^2$ est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

Exercice 9.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Condition Suffisante de diagonalisabilité

Si le polynôme charactéristique χ_A de $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ admet n racines distinctes, alors A est diagonalisable.

Matrices trigonalisables

Toute matrice A de $\mathbb{C}^{n\times n}$ est **trigonalisable**, c'est à dire semblable à une matrice triangulaire : Pour toute matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, il existe $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ triangulaire supérieure et $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telles que $A = PTP^{-1}$

Exercice 10.

Démontrer les 3 assertions de l'encadré suivant.

Valeurs propres des combinaisons de A et I_n et des puisances de A.

Pour toute matrice $A \in \mathbb{C}^n$, on a les propriétés suivantes :

1. Si $a, b \in \mathbb{C}$, alors les valeurs propres de $aA + bI_n$ sont les scalaires $a\lambda + b$ où λ décrit le spectre de A.
2. Les valeurs propres de $A^k, k \geq 1$ sont les λ^k où λ décrit le spectre de A. Plus généralement, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, les valeurs propres de la matrice $P(A)$ sont les $P(\lambda)$ où λ décrit le spectre de A.
3. Lorsque A est inversible, les valeurs propres de A^{-1} sont les scalaires $\frac{1}{\lambda}$ où λ décrit le spectre de A.

Exercice 11.

Soient $a, b \in \mathbb{C}$, déterminer les éléments propres de la matrice A et en déduire ceux de la matrice B.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & \cdots & b \\ b & a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ b & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Exercice 12.

Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, on note λ_i les valeurs propres de A. Montrer que

$$\operatorname{Tr} A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \quad \text{et} \quad \det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$