Faculté des sciences et ingénierie (Toulouse III)
Département de mathématiques – L2 Maths
U.E. Méthodes Numériques

Année universitaire
2017-2018

Examen Terminal, Méthodes Numériques

Durée : 3 heures - Calculatrices et portables interdits

La clarté et la précision de l'orthographe et de la rédaction entreront pour une part importante dans la notation.

Exercice 1. (Questions de cours et d'application directe)[3 points]

1. Compléter le tableau de différences divisées suivant et donner le polynôme d'interpolation de Lagrange correspondant dans les bases de Newton et de Lagrange.

x_i	$f(x_i)$				
-1	$-\frac{3}{2}$				
$-\frac{1}{2}$	0	c			
0	b	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$		
a	0	$-\frac{1}{2}$	d	e	
1	0	0	$\frac{1}{2}$	f	g

2. Donner la méthode d'intégration numérique de Simpson sur l'intervalle [a,b] ainsi que son degré d'exactitude (aussi appelé son ordre).

Exercice 2. (Interpolation de Lagrange 1)[3 points]

1. Construire, pour α et β deux réels donnés, le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux noeuds $(-1, \alpha), (0, \beta)$ et $(1, \alpha)$. Quel est le degré de P dans le cas où $\alpha = \beta$?
2. Montrer que P est pair. Peut-il être de degré 1 ?

Exercice 3. (Interpolation de Lagrange 2) [6 points]
Soit $\varepsilon \in]0, 1[$ et f de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[0, 1]$.

1. Calculer le polynôme d'interpolation P_ε de Lagrange de f associé aux noeuds $0, \varepsilon$ et 1.
2. Donner, à l'aide d'un résultat du cours, une estimation de l'erreur d'approximation $|f(x) - P_\varepsilon(x)|$ pour $x \in [0, 1]$.
3. En écrivant P_ε sous sa forme développée, montrer que pour tout $x \in [0, 1]$ fixé,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} P_\varepsilon(x) = f(0) + xf'(0) + (f(1) - f(0) - f'(0))x^2 \text{ (noté } Q(x)).$$

4. (a) Montrer que si R est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 tel que $R(0) = R(1) = R'(0) = 0$, alors R est le polynôme nul.

   (b) En déduire que Q est l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à 2 tel que :

$$Q(0) = P(0), \; Q(1) = P(1), \;\; \text{et } Q'(0) = P'(0).$$

   (Pour l'unicité, on pourra montrer que si deux tels polynômes existent...)

5. En remarquant que pour tout $x \in [0,1]$,

$$|Q(x) - f(x)| \leqslant |Q(x) - P_\varepsilon(x)| + |P_\varepsilon(x) - f(x)|,$$

   montrer que pour tout $x \in [0,1]$,

$$|Q(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{6} \sup_{t\in[0,1]} |f^{(3)}(t)| + 3\varepsilon \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| + \varepsilon \sup_{t\in[0,1]} |f^{(2)}(t)|.$$

Exercice 4. (Calcul approché d'intégrales 1)[4 points]
On définit la fonction $h(x) = \frac{1}{1-x}$ pour $x \in [0,1[$

1. Calculer $H(x) = \int_0^x h(t)dt$ où $0 \leqslant x < 1$ et donner la valeur de $H(\frac{2}{3})$.
2. Calculer les coefficients c_0, c_1 et c_2 pour que la méthode d'intégration numérique suivante soit exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 2

$$J(f) = c_0 f(0) + c_1 f(\frac{1}{3}) + c_2 f(\frac{2}{3}).$$

3. En utilisant la méthode numérique précédente, calculer une valeur approchée de $\ln(3)$.

Exercice 5. (Calcul approché d'intégrales 2)[7 points]
Soit $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On fixe $\omega \in]0,1]$ et on considère la méthode d'intégration numérique sur $[-1,1]$ donnée par :

$$\int_{-1}^1 g(x)dx \simeq \frac{4}{3} g(-\frac{\omega}{2}) + \frac{2}{3} g(\omega).$$

1. Montrer que la méthode numérique est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 1 quelque soit ω.
2. Déterminer ω pour que la méthode d'intégration numérique soit exacte pour les polynômes de plus haut degré possible. Quel est alors son degré d'exactitude (aussi appelé ordre de la méthode) ?
3. Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et une subdivision uniforme $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de $[a,b]$ de pas $h = \frac{b-a}{n}$, c'est-à-dire $x_i = a + h * i$. Proposer par changement de variable une méthode numérique de même degré d'exactitude pour approcher $\int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)dx$, i étant fixé, $0 \leqslant i \leqslant n-1$.
4. En déduire une formule composite pour le calcul de $\int_a^b g(x)dx$. Pour alléger les notations, on propose de noter, pour tout $i = 0 \dots n$, $\alpha_i = x_i + \frac{h}{2}(1 - \frac{\omega}{2})$ et $\beta_i = x_i + \frac{h}{2}(1 + \omega)$.
5. Quelle estimation en fonction de h peut on obtenir pour l'erreur d'approximation de cette méthode composite sur $[a,b]$? Pour cela, on calculera l'erreur de la méthode composite à partir de l'erreur de la méthode "élémentaire" sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$.