Université Toulouse 3 -Paul Sabatier **Année 2018-2019**

Licence 2 Parcours Spécial - Calcul Scientifique

Examen Terminal, 2 mai 2019

Durée : 2 heures - Calculatrices et portables interdits - Seul un recto A4 manuscrit autorisé.

La clarté et la précision de l'orthographe et de la rédaction entreront pour une part importante dans la notation.

Exercice 1. *(Interpolation de Lagrange)*

Calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points $X = [-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1]$, et $Y = [-\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, 0]$ **de deux manières différentes**. Vérifier que vous obtenez le même polynôme.

Correction : Les deux techniques que l'on a vues en cours sont la formule dans la base de Lagrange et la méthode naïve par résolution de système. Ce sont donc ces deux méthodes que l'on va mettre en oeuvre :

Méthode de la base de Lagrange : On va calculer les polynômes $(L_i)_{i=0...4}$ de la base de Lagrange associée aux points $X = [-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1]$. La formule du polynôme d'interpolation associé aux points X et Y est alors :

$$P(X) = y_0L_0(X) + y_1L_1(X) + y_2L_2(X) + y_3L_3(X) + y_4L_4(X).$$

Or ici il faut avoir remarqué que $y_1 = y_3 = y_4 = 0$ pour voir que le calcul de $L_1,\ L_3$ et L_4 est inutile. Reste donc à calculer L_0 et L_2 grâce aux formules du cours. On obtient :

$$L_0 = \frac{2}{3}(X + \frac{1}{2})(X - \frac{1}{2})(X - 1)X, \quad \text{et } L_2(X) = 4(X + 1)(X + \frac{1}{2})(X - \frac{1}{2})(X - 1).$$

On a alors : $P(X) = (X + \frac{1}{2})(X - \frac{1}{2})(X - 1)X + (X + 1)(X + \frac{1}{2})(X - \frac{1}{2})(X - 1)$.
On peut alors factoriser P par $(X - \frac{1}{2})(X + \frac{1}{2})(X - 1)$ et on trouve :

$$P(X) = (X - \frac{1}{2})(X + \frac{1}{2})(X - 1).$$

Méthode équations : On va ici écrire les équations que P doit vérifier :

$$P(-\frac{1}{2}) = P(\frac{1}{2}) = P(1) = 0, \quad P(-1) = -\frac{3}{2}, \quad P(0) = \frac{1}{4}.$$

On sait par ailleurs que P est de degré inférieur ou égal à 4. On peut utiliser les racines de P directement pour le chercher sous forme factorisée plutôt que d'écrire toutes les équations avec P quelconque de degré 4. On obtient alors l'existence d'un polynôme Q tel que

$$P(X) = (X + \frac{1}{2})(X - \frac{1}{2})(X - 1)Q(X)$$

et alors $\deg(P) = 3 + \deg(Q) \leq 4$, donc $\deg(Q) \leq 1$, on peut donc chercher Q sous la forme $Q(X) = aX + b$. En utilisant les deux dernières équations on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} P(-1) = 1 = -a + b \\ P(0) = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}b, \end{cases}$$

d'où $b = 1$ et $a = 0$. Ainsi, $P(X) = (X + \frac{1}{2})(X - \frac{1}{2})(X - 1)$ qui et bien le polynôme trouvé à la question précédente.

Exercice 2. *(Intégration numérique)*

1. Déterminer dans la base de Lagrange le polynôme d'interpolation de Lagrange P_2 de degré 2 associé aux noeuds $x_0 = 0,\ x_1 = 1/2,\ x_2 = 1$, de la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x}$.
   Correction : On cherche ici le polynôme de degré inférieur ou égal à 2 qui vaut $f(0) = 1$ en $x_0 = 0$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{2}{3}$ en $x_1 = \frac{1}{2}$ et $f(1) = \frac{1}{2}$ en $x_2 = 1$. On utilise comme demandé la méthode de la base de Lagrange, il faut donc calculer L_0, L_1 et L_2.
   La formule du cours donne :
   $$\begin{cases} L_0(X) = 2(X - \frac{1}{2})(X - 1) \\ L_1(X) = -4X(X - 1) \\ L_2(X) = 2X(X - \frac{1}{2}), \end{cases}$$
   et on obtient finalement $P_2(X) = 2(X - \frac{1}{2})(X - 1) - \frac{8}{3}X(X - 1) + X(X - \frac{1}{2})$.
2. En utilisant la formule d'erreur d'interpolation, montrer que
   $$|f(x) - P_2(x)| \le x\left|x - \frac{1}{2}\right|(1 - x), \quad \forall x \in [0, 1].$$
   Correction : Le théorème du cours donne l'erreur d'interpolation avec 3 points :
   $$\forall x \in [0, 1], \quad |f(x) - P_2(x)| \le \frac{1}{6}\sup_{z\in[0,1]}|f^{(3)}(z)||x(1 - x)||x - \frac{1}{2}|.$$
   Or, $f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$, $\quad f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$, $\quad f^{(3)}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4}$.
   Donc, pour tout $x \in [0, 1]$, on a $|f^{(3)}(x)| \le 6$ et donc
   $$\forall x \in [0, 1],\ |f(x) - P_2(x)| \le x(1 - x)|x - \frac{1}{2}|.$$
3. Soit $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On considère la formule $J_2(g)$ de calcul approché de l'intégrale $I(g) = \int_0^1 g(x)dx$, supposée exacte pour les polynômes de degré deux, donnée par
   $$J_2(g) = \lambda_0 g(0) + \lambda_1 g\left(\frac{1}{2}\right) + \lambda_2 g(1).$$
   Écrire le système vérifié par le vecteur $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)^\top$.
   Correction : D'après le cours, la méthode J_2 est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 2 si et seulement si
   $$\begin{cases} J_2(1) = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = \int_0^1 dx = 1 \\ J_2(X) = \frac{1}{2}\lambda_1 + \lambda_2 = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2} \\ J_2(X^2) = \frac{1}{4}\lambda_1 + \lambda_2 = \int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}. \end{cases}$$
   Le système obtenu pour $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)^\top$ est alors :
   $$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 = \frac{4}{3}. \end{cases}$$

4. Résoudre le système et en déduire l'expression de la méthode d'intégration numérique J_2. Quelle méthode du cours retrouvez-vous ?
   Correction : Le système obtenu à la question précédente se résoud en $\lambda_0 = \lambda_2 = \frac{1}{6}, \ \lambda_1 = \frac{2}{3}$. On reconnait ici la méthode de Simpson vue en cours (et en TD).
5. Montrer que si f est une fonction continue sur $[0, 1]$ et que P_f est son polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux noeuds $0, 1/2$ et 1, alors $J_2(f) = J_2(P_f)$.
   En revenant à la définition de J_2, on a :
   $$J_2(P_f) = \lambda_0 P_f(0) + \lambda_1 P_f(\frac{1}{2}) + \lambda_2 P_f(1).$$
   Or, par définition de P_f, on sait que $P_f(0) = f(0), \ P_f(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}), \ P_f(1) = f(1)$, ainsi :
   $$J_2(P_f) = \lambda_0 P_f(0) + \lambda_1 P_f(\frac{1}{2}) + \lambda_2 P_f(1) = \lambda_0 f(0) + \lambda_1 f(\frac{1}{2}) + \lambda_2 f(1) = J_2(f).$$
6. Déduire des questions **2.** et **5.** une majoration de l'erreur $|I(f) - J_2(f)|$ pour la fonction $f = x \mapsto \frac{1}{1+x}$ où l'on a noté $I(f) = \int_0^1 f(t)dt$.
   Correction : D'après la question **5.**, $|I(f) - J_2(f)| = |I(f) - J_2(P_f)|$. Or, comme P_f est par définition de degré inférieur ou égal à 2 et que J_2 est supposée exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 2, alors
   $$|I(f) - J_2(f)| = |I(f) - J_2(P_f)| = |I(f) - I(P_f)| \leq \int_0^1 |f(x) - P_f(x)|dx.$$
   Maintenant, en utilisant la question **2.**, on obtient
   $$|I(f) - J_2(f)| \leq \int_0^1 x(1-x)|x - \frac{1}{2}|dx$$

Exercice 3. *(Résolution d'équations non linéaires)*

On s'intéresse dans cet exercice à la méthode de Héron d'Alexandrie pour approcher $\sqrt{2}$:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right), & \forall n \geq 0 \\ x_0 \in \mathbb{R}, & \end{cases}$$

1. Montrer que, pour toute donnée initiale $x_0 > 0$, on a, pour tout $n \geq 0$, on a $x_n > 0$.
   Correction : Un raisonnement par récurrence simple permet de conclure ; En effet, on considère la propriété, pour n fixé
   $$\text{“}H_n : x_n > 0.\text{”}$$
   La propriété H_0 est par hypothèse vraie pour $n = 0$.
   Supposons que H_n soit vraie pour un n fixé, montrons que H_{n+1} reste vraie.
   Par définition, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) > 0$ si on a supposé que $x_n > 0$.
2. Supposons que la suite $(x_n)_n$ converge vers un réel x_∞. Trouver une fonction f telle que x_∞ soit solution du problème de point fixe $x = f(x)$. Tracer le graphe de la fonction f, y faire figurer x_∞ ainsi que la construction des premiers termes de la suite $(x_n)_n$. Démontrer que $x_\infty = \sqrt{2}$.

Correction : Supposons que la suite $(x_n)_n$ converge vers un réel x_∞, lors, par continuité, en passant à la limite dans la définition de la suite $(x_n)_n$ on obtient :

$$x_\infty = \frac{1}{2}\left(x_\infty + \frac{2}{x_\infty}\right).$$

Le réel x_∞ est donc un point fixe de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$. Je vous laisse faire le graphe et la construction des premières valeurs de la suite...
Reste à montrer que $x_\infty = \sqrt{2}$. Pour cela, on reprend l'égalité $x_\infty = \frac{1}{2}\left(x_\infty + \frac{2}{x_\infty}\right)$, et, comme $x_\infty \neq 0$, alors cette égalité est équivalente à
$x_\infty^2 = \frac{1}{2}x_\infty^2 + 1$, ce qui conduit à $x_\infty^2 = 2$ et $x_\infty \geq 0$ puisque tous les termes de la suite sont positifs. On a donc bien $x_\infty = \sqrt{2}$ (c'est la définition même du réel $\sqrt{2}$).

3. En utilisant le théorème de point fixe, démontrer que la suite $(x_n)_n$ converge pour des données initiales bien choisies.
   Correction : Cette question est un peu plus compliquée. Je vais donc être succincte, c'est pour aller un peu plus loin. Il suffit pour pouvoir appliquer le théorème du point fixe de trouver un intervalle I tel que f soit contractante sur I. On voit par le calcul que pour $x > \sqrt{\frac{2}{3}}$, alors $|f'(x)| < 1$. Ainsi, en choisissant correctement la donnée initiale, et en utilisant le théorème du point fixe on peut conclure à la convergence de la suite.

Exercice 4. *(Équations différentielles ordinaires)*

On considère l'EDO

$$\begin{cases} y'(t) = -\alpha\, y(t)\,, \quad \forall t \in [0,T] \\ y(0) = 1\,, \end{cases} \tag{1}$$

et on choisira $\alpha = 100$ et $T = 10$.

1. Donner la solution exacte du problème (1).
   Correction : La solution exacte est bien sur donnée par $y_{ex}(t) = e^{-\alpha t}$.
2. On considère une subdivision uniforme $t_n,\ 0 \leq n \leq N$ de $[0,T]$ de pas h (c'est-à-dire que $t_n = nh$). Ecrire l'approximation y_{n+1}^e de $y(t_{n+1})$ obtenue par la méthode d'Euler explicite en fonction de y_n^e et en déduire une expression explicite de y_n^e en fonction de n.
   Correction : Le cours donne la formule de récurrence suivante pour la méthode d'Euler explicite :

   $$y_0^e = 1, \quad \forall n \geq 0,\ y_{n+1}^e = y_n^e - \alpha h y_n^e = (1-\alpha h) y_n^e.$$

   Il s'agit d'une suite géométrique de raison $1 + \alpha h$, on sait donc que y_n^e s'écrit : $y_n^e = (1-\alpha h)^n$.
3. Faire de même avec l'approximation y_n^i de $y(t_n)$ obtenue par la méthode d'Euler implicite.
   Correction : Le cours donne la formule de récurrence suivante pour la méthode d'Euler explicite :

   $$y_0^i = 1, \quad \forall n \geq 0,\ y_{n+1}^i = y_n^i - \alpha h y_{n+1}^i.$$

   On a donc $y_{n+1}^i = \frac{1}{1+\alpha h} y_n^i$. Il s'agit d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{1+\alpha h}$, on sait donc que y_n^i s'écrit : $y_n^i = \frac{1}{(1+\alpha h)^n}$.

4. On fixe un entier positif n, calculer un équivalent de y_n^e et de y_n^i quand h tend vers 0. Cela correspond-il à un résultat connu du cours ?
   Correction : On fixe n entier positif. On a alors :
   Euler explicite : $y_n^e = e^{n\ln(1-\alpha h)} \sim e^{-\alpha nh} = y_{ex}(nh)$ quand $h \to 0$.
   Euler implicite : $y_n^i = e^{-n\ln(1+\alpha h)} \sim e^{-\alpha nh} = y_{ex}(nh)$ quand $h \to 0$.
   Ainsi, on retrouve le fait que, à n fixé, y_n^e et y_n^i convergent vers $y_{ex}(t_n)$ quand h tend vers 0 (c'est le théorème de convergence des méthodes d'Euler explicite et implicite).
5. On fixe maintenant $0 < h < 1$. Que dire de y_n^e et y_n^i quand n tend vers l'infini ? Quelle est la limite de $y(t_n)$ lorsque n tend vers l'infini ? Quelle méthode vous paraît la mieux adaptée ?
   Correction : Si on fixe maintenant $h \in]0,1[$ et que l'on regarde le comportement quand $n \to \infty$ c'est à dire en temps long ($t_n = nh \to \infty$), on observe que $y_{ex}(nh) = e^{-\alpha nh} \to 0$, lorsque $y_n^e = (1-\alpha h)^n$ ne tend vers 0 que si $|1-\alpha h| < 1$ c'est) à dire $h < \frac{2}{\alpha}$ (ce qui peut être faux puisque h est déjà fixé). Dans le cas contraire, le comportement de y_n^e est tout à fait différent de celui de la solution exacte. Alors que pour la méthode d'Euler implicite, quel que soit $h > 0$ on a convergence vers 0 lorsque n tend vers ∞. Ainsi, la méthode d'Euler implicite est mieux adaptée à ce problème.