Université Toulouse 3 -Paul Sabatier **Année 2018-2019**

Licence 2 Parcours Spécial - Calcul Scientifique

Examen Terminal, 2 mai 2019

Durée : 2 heures - Calculatrices et portables interdits - Seul un recto A4 manuscrit autorisé.

La clarté et la précision de l'orthographe et de la rédaction entreront pour une part importante dans la notation.

Exercice 1. *(Interpolation de Lagrange)*

Calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points $X = [-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1]$, et $Y = [-\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, 0]$ **de deux manières différentes**. Vérifier que vous obtenez le même polynôme.

Exercice 2. *(Intégration numérique)*

1. Déterminer dans la base de Lagrange le polynôme d'interpolation de Lagrange P_2 de degré 2 associé aux noeuds $x_0 = 0,\ x_1 = 1/2,\ x_2 = 1$, de la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x}$.
2. En utilisant la formule d'erreur d'interpolation, montrer que
$$|f(x) - P_2(x)| \leq x \left| x - \frac{1}{2} \right| (1 - x), \quad \forall x \in [0, 1].$$
3. Soit $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On considère la formule $J_2(g)$ de calcul approché d'intégrale sur $[0, 1]$ exacte pour les polynômes de degré deux, basée sur les noeuds d'interpolation $0, 1/2$ et 1, donnée par
$$J_2(g) = \lambda_0 g(0) + \lambda_1 g\left(\frac{1}{2}\right) + \lambda_2 g(1).$$
Écrire le système vérifié par le vecteur $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)^\top$.
4. Résoudre le système et en déduire l'expression de la méthode d'intégration numérique J_2. Quelle méthode du cours retrouvez-vous ?
5. Montrer que si f est une fonction continue sur $[0, 1]$ et que P_f est son polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux noeuds $0, 1/2$ et 1, alors $J_2(f) = J_2(P_f)$.
6. Déduire des questions **2.** et **5.** une majoration de l'erreur $|I(f) - J_2(f)|$ pour la fonction $f = x \mapsto \frac{1}{1+x}$ où l'on a noté $I(f) = \int_0^1 f(t)dt$.

Exercice 3. *(Résolution d'équations non linéaires)*

On s'intéresse dans cet exercice à la méthode de Héron d'Alexandrie pour approcher $\sqrt{2}$:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right), & \forall n \geq 0 \\ x_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

1. Montrer que, pour toute donnée initiale $x_0 > 0$, alors, pour tout $n \geq 0$, on a $x_n > 0$.
2. Supposons que la suite $(x_n)_n$ converge vers un réel x_∞. Trouver une fonction f telle que x_∞ soit solution du problème de point fixe $x = f(x)$. Tracer le graphe de la fonction f, y faire figurer x_∞ ainsi que la construction des premiers termes de la suite $(x_n)_n$. Démontrer que $x_\infty = \sqrt{2}$.
3. En utilisant le théorème de point fixe, démontrer que la suite $(x_n)_n$ converge pour des données initiales bien choisies.

Exercice 4. *(Équations différentielles ordinaires)*

On considère l'EDO

$$\begin{cases} y'(t) = -\alpha\, y(t)\,, & \forall t \in [0,T] \\ y(0) = 1\,, \end{cases} \tag{1}$$

et on choisira $\alpha = 100$ et $T = 10$.

1. Donner la solution exacte du problème (1).
2. On considère une subdivision uniforme $t_n,\ 0 \leq n \leq N$ de $[0,T]$ de pas h (c'est-à-dire que $t_n = nh$). Ecrire l'approximation y^e_{n+1} de $y(t_{n+1})$ obtenue par la méthode d'Euler explicite en fonction de y^e_n et en déduire une expression explicite de y^e_n en fonction de n.
3. Faire de même avec l'approximation y^i_n de $y(t_n)$ obtenue par la méthode d'Euler implicite.
4. On fixe un entier positif n, calculer un équivalent de y^e_n et de y^i_n quand h tend vers 0. Cela correspond-il à un résultat connu du cours ?
5. On fixe maintenant $0 < h < 1$. Que dire de y^e_n et y^i_n quand n tend vers l'infini ? Quelle est la limite de $y(t_n)$ lorsque n tend vers l'infini ? Quelle méthode vous paraît la mieux adaptée ?