Université de Toulouse III, FSI - Département de Mathématiques
Licence 2, module "Calcul scientifique" , 2013-2014

Projet "Calcul numérique des logarithmes par interpolation" Novembre 2013

Le mot "logarithme" vient du grec, $\lambda \acute{o} \gamma o \zeta$ signifiant "mot, relation" et $\alpha \rho \iota \theta \mu \acute{o} \zeta$ signifiant "nombre". Les logarithmes sont donc des relations utiles entre les nombres. Les premières tables logarithmiques, qui ont été un outil précieux pendant des siècles, étaient construites à l'aide des principes décrits ci-dessous et n'utilisaient que des opérations simples. Elles ont été introduites par John Napier (1614), Henry Briggs (1615) et Jost Bürgi (1620).

L'interpolation a été un outil important pour accélérer le calcul des logarithmes. Le but de ce projet est de déterminer numériquement par interpolation quelques valeurs de logarithmes, et de comparer les résultats avec ceux obtenus par python.

Quelques propriétés des logarithmes : Soit $P, Q \in \mathbb{R}^+$.
(a) Le logarithme du produit $P * Q$ est la somme des logarithmes de ses facteurs, à savoir $\log(P * Q) = \log(P) + \log(Q)$.
(b) Le logarithme d'un quotient P/Q est la différence des logarithmes de ses facteurs, à savoir $\log(P/Q) = \log(P) - \log(Q)$.
(c) Le logarithme d'un nombre P élevé à une puissance Q est $Q * \log(P)$, à savoir $\log(P^Q) = Q * \log(P)$.

En utilisant ces propriétés, on va élaborer un algorithme pour calculer de manière rapide les logarithmes de pleins de nombres.

Anciennes méthodes :
Supposons que l'on veuille calculer pour un certain $x \in \mathbb{R}^+$ le logarithme dans la base $a > 0$, *i.e.*

$$y = \log_a(x)\,.$$

On sait que $\log_a(a) = 1$ et que $\log_a(a^{m/n}) = \frac{m}{n}$ pour tout $m, n \in \mathbb{R}^+$. Donc, si on calcule la racine carrée de la base a, puis la racine carrée du résultat et ainsi de suite (ou tout simplement si on calcule $a^{m/n}$), on arrive à calculer le logarithme de plusieurs nombres, mais peut-être pas de tous. En outre, cette manière de faire, qui est l'idée derrière les tables logarithmiques, est assez encombrante.

Calcul approché des logarithmes par interpolation :
Supposons qu'on connaît quelques valeurs du logarithme $\log_a$, c.à.d., supposons qu'on connaît les valeurs suivantes

$$(x_i, y_i)_{i=0}^n\,, \quad y_i = \log_a(x_i)\,, \quad 0 < x_0 \leqslant \cdots \leqslant x_n\,.$$

On a trouvé par exemples ces valeurs en utilisant les anciennes méthodes. Maintenant, il suffit de trouver une fonction simple (par ex. un polynôme $\Pi(x)$) qui passe par ces $n+1$ points (c.à.d. tq. $\Pi(x_i) = y_i$ pour tout $i = 0, \cdots, n$), pour pouvoir approcher les valeurs de $\log_a(x)$ à n'importe quel $x \in [x_0, x_n]$, en posant $\log_a(x) \sim \Pi(x)$.

Méthodes d'interpolation :
Soit $a = x_0 \leqslant \cdots \leqslant x_i \leqslant \cdots \leqslant x_n = b$ une division de l'intervalle $[a, b]$ et $\{y_i\}_{i=0}^n$, des valeurs correspondantes. De manière générale, le problème de l'interpolation polynômiale est de trouver un polynôme de degré inférieur ou égal à m, $\Pi_m \in \mathcal{P}_m$, appelé polynôme d'interpolation, vérifiant $\Pi_m(x_i) = y_i$, $\forall i$. Posé sous cette forme, ce problème peut avoir un nombre infini de solutions, une seule solution ou aucune. Toutefois, il y a une et une seule solution, si on cherche cette solution dans l'espace $\mathcal{P}_n$ $(m = n)$. En effet, en choisissant une base de $\mathcal{P}_n := span\{\phi_0, \phi_1, \cdots, \phi_n\}$, on peut écrire le polynôme recherché sous la forme

$$\Pi_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \, \phi_i \,,$$

où les $n + 1$ coeficients $\alpha_i \in \mathbb{R}$ sont à déterminer, en utilisant les contraintes $\Pi_n(x_i) = y_i$, $\forall i = 0, \cdots, n$. On est ainsi amené à résoudre le système linéaire

$$\begin{pmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \cdots & \phi_n(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_0(x_n) & \phi_1(x_n) & \cdots & \phi_n(x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} , \tag{1}$$

qui admet une unique solution.

Idée I : L'idée la plus simple pour le choix de la base de l'éspace d'interpolation $\mathcal{P}_n$ est $\mathcal{P}_n := span\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$. Avec ce choix, la matrice du système (1) est la matrice de Vandermonde

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} ,$$

qui est très mal conditionnée, ce qui implique que la résolution du système linéaire (1) sera délicate. Cette procédure est donc à éviter.

Idée II : Un meilleur choix de fonctions de base pour l'espace d'interpolation $\mathcal{P}_n$ est donné par les polynômes caractéristiques de Lagrange $l_i \in \mathcal{P}_n$ associés aux noeuds $\{x_i\}_{i=0}^n$

$$l_i(x) := \Pi_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \,, \quad i = 0, \cdots n \,, \tag{2}$$

Comme $l_i(x_j) = \delta_{ij}$, on peut déduire que le polynôme d'interpolation recherché se laisse écrire sous la forme suivante (formule d'interpolation de Lagrange) et est unique :

$$\Pi_n(x) := \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x) \,. \tag{3}$$

Théorème : Etant donné $n + 1$ points distincts $x_0, \cdots, x_n$ ainsi que $n + 1$ valeurs associées $y_0, \cdots, y_n$, il existe un unique polynôme $\Pi_n \in \mathcal{P}_n$, tel que $\Pi_n(x_i) = y_i$ pour $i = 0, \cdots, n$. Ce polynôme c'est le polynôme d'interpolation de Lagrange, donné par la formule (3).

Application :
Mettre en oeuvre les deux méthodes d'interpolation définies plus haut (Idée I et II), et calculer, en les utilisant, les logarithmes $\log_{10}(x)$ pour $x \in [1, 10]$, en sachant que

$$\log_{10}(1) = 0\,, \quad \log_{10}(10) = 1\,,$$

et en essayant de trouver quelques valeurs intermédiaires $\log_{10}(x_i)$ avec l'ancienne méthode, par ex. pour x_i, $i = 1, \cdots, n-1$ avec $n = 3, 4, 5, \cdots$, sachant qu'on mettra $x_0 = 1$ et $x_n = 10$. Comparer les deux méthodes d'interpolation. Comparer aussi les résultats obtenus pour $\log_{10}(x)$, $x \in [1, 10]$, avec ceux donnés par python.