

IUP Systèmes Intelligents - Algèbre linéaire

Sébastien Gadat
gadat@cict.fr

19 novembre 2005

1 Espaces vectoriels

1.1 Espace vectoriels, présentation intuitive

Un espace vectoriel est un ensemble d'éléments $x, y, \dots$ appelés vecteurs sur lequel on définit des opérations dites *linéaires* : addition et multiplication par un scalaire (un nombre réel la plupart du temps), avec les règles usuelles liées à la notion d'addition et multiplication : associativité, élément neutre, transitivité, $\dots$

L'addition désigne une opération interne entre deux vecteurs donnant un vecteur, tandis que la multiplication est une opération externe entre un scalaire et un vecteur donnant encore un vecteur.

On parle d'espace vectoriel *réel* si les scalaires sont les nombres réels. De même, on parle d'espace vectoriel complexe si les scalaires sont les nombres complexes. Dans toute la suite, il s'agit d'espace vectoriel réel, sauf mention explicite.

1.2 Exemple d'espaces vectoriels

1.2.1 Nombres réels

Le premier exemple d'espace vectoriel réel est l'ensemble $\mathbb{R}$ lui-même avec addition et multiplication usuelle. Dans ce cas particulier, les nombres réels peuvent être à la fois considérés comme des scalaires et comme des vecteurs. Il en va de même pour $\mathbb{C}$.

1.2.2 Vecteurs de $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ désigne l'ensemble des vecteurs de taille n de nombre réels notés génériquement

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

où chaque composante est un nombre appartenant à $\mathbb{R}$. On définit alors addition de deux vecteurs par :

$$x + y = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

La multiplication scalaire, elle est définie par :

$$\lambda.x = \lambda.(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

1.2.3 Polynômes de degré p

On note $\mathcal{P}_p$ l'ensemble des polynômes de degré p , cet ensemble est un espace vectoriel où l'on définit l'addition de deux polynômes par

$$P + Q = \sum_{i=0}^p a_i X^i + \sum_{i=0}^p b_i X^i$$

et la multiplication par un scalaire :

$$\lambda P = \lambda \sum_{i=0}^p a_i X^i = \sum_{i=0}^p \lambda a_i X^i$$

1.3 Espace vectoriel : la définition

Voici la définition formelle de la notion d'espace vectoriel et donc abstraite :

Définition 1.1 (Espace vectoriel) Soit E un ensemble abstrait, muni d'une opération interne notée $+$ et d'une opération externe notée $.$ avec un scalaire réel, on dit que $(E, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. $\forall x, y \in E \quad x + y \in E$
2. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda x \in E$
3. $\forall x, y, z \in E \quad (x + y) + z = x + (y + z) = x + y + z$
4. $\forall x, y \in E \quad x + y = y + x$
5. $\forall x, \lambda, \mu \quad \mu(\lambda x) = \lambda(\mu x) = \lambda \mu x$
6. $\forall x, y, \lambda \quad \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
7. $\forall x \forall \lambda, \mu \quad (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
8. $\exists 0_E \in E \quad \forall x \quad x + 0_E = 0_E + x = x$
9. $\forall x \in E \quad \exists y \in E \quad x + y = 0_E$

Remarque : on notera $(-x)$ l'élément défini par le point précédent qui est l'opposé de x dans E .

Exercice 1.1 Montrer que les ensembles définis dans la section d'exemple sont bien des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels. Préciser à chaque fois le neutre, et l'opposé.

1.4 Sous-espace vectoriel

Définition 1.2 (Sous-espace vectoriel) Soit E un espace vectoriel réel et soit un sous-ensemble non vide X inclus dans E . X est un sous-espace vectoriel réel s'il satisfait aux conditions de stabilité linéaire, c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in X \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad x + y \in X \quad \text{et} \quad \lambda x \in X$$

Exemple 1 Toute droite du plan, passant par l'origine est un sous-espace vectoriel du plan. Tout plan ou droite de $\mathbb{R}^3$ contenant 0 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Enfin, si l'on note $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes de degré indéterminé, l'ensemble $\mathcal{P}_k$ des polynômes de degré inférieur ou égal à k est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}$.

Exercice 1.2 Soit V un espace vectoriel et V_1, V_2 2 sous-espaces vectoriels de V . On définit $V_1 \cap V_2$ par

$$V_1 \cap V_2 = \{x \in V_1 \text{ et } x \in V_2\}$$

Montrer que $V_1 \cap V_2$ est un sous-espace vectoriel de V . De même, $V_1 + V_2$ désigne l'ensemble :

$$V_1 + V_2 = \{x \in V \mid \exists (x_1, x_2) \in V_1 \times V_2 \quad x = x_1 + x_2\}$$

Montrer que $V_1 + V_2$ est un sous-espace vectoriel de V . Enfin, $V_1 \cup V_2$ est-il tout le temps un sous-espace vectoriel de E ?

Exercice 1.3 Soit $C = \{(a, a+b, 3b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$, montrer que C est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 1.4 Les sous-ensembles suivants du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?

1. $E_1 = \{f \in E \mid f(-1) = 0\}$
2. $E_2 = \{f \in E \mid f(3) = 1 + f(-5)\}$
3. $E_3 = \{f \in E \mid f \text{ bornée}\}$
4. $E_4 = \{f \in E \mid f \leq 0\}$

1.5 Indépendance linéaire : vecteurs libres, vecteurs liés

Définition 1.3 (Combinaison linéaire) Soit E un espace vectoriel réel ou complexe, et soient p vecteurs $x_1, x_2, \dots, x_p$, si $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont des scalaires, on dit que le vecteur

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_p x_p$$

est une combinaison linéaire des vecteurs $x_1, \dots, x_p$.

Avec cette définition, nous pouvons alors définir deux types de familles de vecteurs : les familles libres et liées.

Définition 1.4 (Famille libre, famille liée) On dit que les vecteurs $x_1, \dots, x_p$ forment une famille libre (ou qu'ils sont linéairement indépendants) si toute combinaison linéaire non nulle de ces vecteurs est nécessairement non nulle :

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_p x_p = 0 \implies \alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$$

Inversement, on dit que les vecteurs sont liés s'ils ne sont pas libres, c'est-à-dire s'il existe une combinaison linéaire non nulle $((\alpha_1, \dots, \alpha_p) \neq (0, \dots, 0))$ telle que

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_p x_p = 0$$

Cette notion de famille libre est très utile car elle permet d'énoncer la propriété :

Proposition 1.1 *Si les vecteurs $(x_1, \dots, x_p)$ forment une famille libre, alors toute combinaison linéaire a s'écrit de façon unique :*

$$x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_p x_p$$

L'unicité se réfère aux scalaires α_i .

Exercice 1.5 *Dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$, on considère les familles de vecteurs suivantes :*

$$F_1 = \{v_1 = (1, 1)\} \quad F_2 = \{v_1, v_2 = (1, -2), v_3 = (3, 4)\} \quad F_3 = \{v_1, v_2\} \quad F_4 = \{v_1, v_4 = (-3, -3)\}$$

Indiquer quelles sont les familles libres.

1.6 Familles génératrices

Dans les espaces vectoriels, on peut coder les vecteurs comme des combinaisons linéaires d'un petit nombre de vecteurs.

Exemple 2 *On code dans $\mathcal{P}_3$ tous les polynômes avec quatre réels et les quatre vecteurs $P_0 = 1, P_1 = X, P_2 = X^2, P_3 = X^3$. En effet, tout polynôme de degré inférieur à 3 s'écrit*

$$P = aP_3 + bP_2 + cP_1 + dP_0$$

Exemple 3 *C'est également le cas dans le plan $\mathbb{R}^2$ qui peut être codé comme l'ensemble des combinaisons linéaires des 2 vecteurs $\vec{i} = (1, 0)$ et $\vec{j} = (0, 1)$.*

La définition suivante étend cette propriété :

Définition 1.5 *Famille génératrice On dit que la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est générateur de l'espace vectoriel V si tout vecteur x de V peut s'écrire*

$$x = \sum_{i=1}^p \alpha_i x_i$$

Exercice 1.6 *Trouver parmi les familles de vecteurs données dans l'exercice 1.4 lesquelles sont génératrices de $\mathbb{R}^2$.*

Exercice 1.7 *Montrer que si $(P_n)_{n=1..d}$ désigne une famille de polynômes de degrés échelonnés ($\deg(P_k) = k$), alors cette famille est génératrice de $\mathcal{P}_d$.*

On peut définir en plus de la notion de famille génératrice la notion d'espace engendré par une famille de vecteurs.

Définition 1.6 *Soit $X = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k\}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{x}_i$ est appelé sous-espace vectoriel engendré par la famille X et on le note $\text{Vect}(X)$. C'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant tous les vecteurs de la famille X .*

1.7 Bases d'un espace vectoriel

Définition 1.7 (Base) Un système de vecteurs $(e_1, \dots, e_p)$ générateur et libre d'un espace vectoriel E est appelé base de l'espace vectoriel. Tout vecteur $v \in E$ se décompose alors de manière unique dans la base $(e_1, \dots, e_p)$:

$$\exists !(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \quad v = \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i$$

Les coefficients (λ_i) de la décomposition de v sont appelés coordonnées de v sur la base $(e_1, \dots, e_p)$.

Les bases sont particulièrement intéressantes parce qu'elles permettent de travailler sur un espace vectoriel en n'utilisant que les coordonnées des vecteurs, coordonnées qui sont réelles (ou complexes).

Exemple 4 (Base de $\mathbb{R}^n$) Les vecteurs $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$ constituent une base de $\mathbb{R}^n$. Cette base est appelée base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 5 (Base de $\mathcal{P}_n$) Les vecteurs monômes X^i , i variant de 1 à n constituent une base de $\mathcal{P}_n$. Cette base est appelée base canonique de $\mathcal{P}_n$.

Exercice 1.8 Des familles de l'exercice 1.4, donnez celles qui forment une base de $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

Exercice 1.9 Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$ sont-ils des sous-espaces vectoriels de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$. Si oui, en donner une base.

1. $F_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 2x_2 - x_3\}$
2. $F_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 - x_3 = 2\}$
3. $F_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \sin(x_3) = x_1 + x_2\}$
4. $F_4 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 - x_3 = x_1 + 2x_2 - 3x_3\}$
5. F_5 est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ formé par les vecteurs dont la somme des coordonnées relativement à la base canonique est nulle.

Certaines propositions limitent le nombre d'éléments de bases :

Proposition 1.2 Si E possède un système de générateur de m éléments $(v_1, \dots, v_m)$, tout système libre a au plus m éléments.

On peut déduire de cette propriété le théorème fondamental :

Théorème 1.1 Deux bases d'un espace vectoriel E ont le même nombre d'éléments. Ce nombre est appelé dimension de l'espace vectoriel E , et on note ce nombre $\dim E$.

Remarque 1 *Un peu de géométrie : un espace vectoriel de dimension 0 est un point, de dimension 1 est une droite vectorielle, de dimension 2 un plan vectoriel. On appelle hyperplan H tout sous-espace vectoriel de dimension $n - 1$ si l'espace vectoriel global est de dimension n . En dimension 3, un hyperplan est en fait un plan vectoriel de dimension 2.*

Exercice 1.10 1. Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 3 dont $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base. Les vecteurs suivants de E

$$v_1 = e_1 - 2e_2 + e_3 \quad v_2 = 3e_1 - e_2 + e_3 \quad v_3 = 2e_1 + 6e_2 - 2e_3$$

constituent-ils une base de E ?

2. On pose $E_1 = \text{vect}(v_1, v_2, v_3)$. Donner la dimension de E_1 et trouver une base de E_1 extraite de la famille génératrice $\{v_1, v_2, v_3\}$. Exprimer dans cette base ceux des vecteurs qui n'en font pas partie.

Exercice 1.11 1. Les vecteurs $(1, -5, 3)$, $(1, -2, 2)$ et $(2, 5, 1)$ sont-ils liés ? Quel est le rang de la famille qu'ils forment ?

2. Est-ce que l'ensemble $\{(1, 2); (1, -1); (1, 1)\}$ est un système générateurs de $\mathbb{R}^2$? Est-ce une base de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 1.12 Dans $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique, considérons les vecteurs suivants :

$$X = (2, 3, 1) \quad Y = (1, 2, 2) \quad Z = (0, 1, 2)$$

1. Ces trois vecteurs forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?
 2. Le vecteur $T = (1, 0, 0)$ se décompose-t-il de manière unique sur (X, Y, Z) ? Si oui, expliciter cette décomposition.

Remarque 2 *La dimension d'un sous-espace vectoriel est le nombre maximum de vecteurs que peut contenir une famille libre ou le nombre minimal de vecteurs nécessaires pour constituer une famille génératrice.*

De cette remarque, on tire les deux propriétés suivantes :

Proposition 1.3 *Soit V un espace vectoriel de dimension n :*

- *Toute famille libre de n éléments est une base.*
- *Toute famille génératrice de n éléments est une base.*

Attention, il est important de réaliser qu'un espace vectoriel n'a en général pas de base privilégiée. Soit par exemple $n \geq 0$ un entier et $V = \mathcal{P}_n$, deux bases peuvent être $1, X, X^2, \dots, X^n$ et $1, X, X^2/2, \dots, X^n/n!$.

Définition 1.8 (Rang d'une famille de vecteurs) *On appelle rang d'une famille de vecteurs la dimension de l'espace engendré par cette famille de vecteurs. Ce nombre est donc inférieur à la dimension de l'espace total.*

On retrouvera cette notion de rang avec les applications linéaires, ainsi qu'avec les matrices.

1.8 Somme de sous-espaces vectoriels

Définition 1.9 (Somme de sous espaces vectoriels) Soient V et V' deux sous-espaces vectoriels de E , on note :

$$V + V' = \{v + v' \mid v \in V, v' \in V'\}$$

Proposition 1.4 La somme de deux sous-espaces vectoriels de E est aussi un sous-espace vectoriel de E .

Exemple 6 Vérifier que le plan $\mathbb{R}^2$ est somme des sous-espaces engendrés par l'axe des abscisses et celui des ordonnées. Montrer qu'il en est de même pour tout couple de droites vectorielles non parallèles.

Définition 1.10 (Somme directe) Soient E un espace vectoriel, V et V' deux sous-espaces. On dit que V et V' sont en somme directe si $V \cap V' = \{0_E\}$. Dans ce cas, on note $V \oplus V'$ le sous-espace somme. Par ailleurs, dans le cas où cette somme vaut E , on dit que V et V' sont supplémentaires.

On vérifiera que dans les exemples précédents, les sous-espaces sont en réalité en somme directe et sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 1.13 Montrer que l'ensemble des fonctions paires et celui des fonctions impaires sont en somme directe. Montrer qu'en plus ils sont supplémentaires dans l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Décomposer alors la fonction $x \mapsto e^x$.

Exercice 1.14 Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ et les sous-ensembles suivants de E :

$$U = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\} \quad V = \{(x, y, z) \mid x = 0\}$$

$$W = \{(x, y, z) \mid x = y = 0\} \quad T = \{(x, y, z) \mid x - 2y = 0 \text{ et } y + 2z = 0\}$$

1. Montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels de E .
2. Les sommes suivantes sont-elles directes : $U + V, U + W, U + T, V + W, V + T, W + T$?
3. Comparer au sens de l'inclusion, les sous-espaces vectoriels suivants : $E, U + V, U + W, V + W$.
4. Déterminer les couples de sous-espaces vectoriels supplémentaires parmi U, V, W, T .
5. Déterminer le projeté de $u = (1, 1, 1)$ sur U parallèlement à W , puis le projeté de u sur U parallèlement à T .

2 Applications linéaires et Matrices

2.1 Définitions

On va définir des applications qui partent d'un espace vectoriel E et qui arrivent dans un espace vectoriel F qui se comportent "bien", par rapport aux opérations des espaces vectoriels (multiplication externe et addition).

Définition 2.1 (Applications linéaires) Soient deux espaces vectoriels E et F , une application $\phi : E \rightarrow F$ est dite linéaire si

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall (v, w) \in E^2 \quad \phi(\lambda v + \mu w) = \lambda \phi(v) + \mu \phi(w)$$

Remarque 3 Pour démontrer qu'une application A est linéaire, il sera suffisant d'établir :

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2 \quad A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2)$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall x \in E \quad A(\alpha x) = \alpha A(x)$$

Dans un langage plus savant, on appelle ces applications aussi homomorphisme. Dans le cadre des matrices, on pourra aussi noter Ax l'image de x par A . On remarque enfin que $A(0) = 0$.

Nous désignerons dans toute la suite du cours l'ensemble des applications linéaires de E dans F par $\mathcal{L}(E, F)$.

Proposition 2.1 Une application linéaire est entièrement déterminée par les images des vecteurs d'une base.

En effet, si $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E , alors tout vecteur x se décompose de manière unique

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$$

Puis, appliquant la linéarité de A , on peut donc en conclure que

$$A(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i A(x_i)$$

Les valeurs des $A(x_i)$ suffisent donc à déterminer toutes les images de A . On démontre également que l'ensemble des applications linéaires de E dans F admet une structure particulière :

Proposition 2.2 L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ muni des lois $+$ et $\cdot$ définies par

$$(\phi + \psi)(u) := \phi(u) + \psi(u)$$

et

$$(\lambda \phi)(u) := \lambda \cdot \phi(u)$$

est un espace vectoriel.

Définition 2.2 Si A est un opérateur linéaire de E dans F qui établit une bijection de E vers F , on dit que A est inversible. On peut alors définir l'application réciproque A^{-1} de F vers E par la relation

$$A^{-1}(A(x)) = x$$

On définit également d'autres sortes d'applications linéaires qui sont les applications injectives et les applications surjectives. Pour définir de telles applications, nous avons besoin de définir :

Définition 2.3 (Noyau et Image d'une application linéaire) On appelle noyau de l'application linéaire $A \in \mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des x de E tels que $A(x) = 0_F$ et noté également $\ker A$. C'est-à-dire :

$$\ker A = \{x \in E \mid A(x) = 0_F\}$$

L'image de l'application A est alors l'ensemble des points atteints par l'application A dans F , autrement dit :

$$\operatorname{Im} A = \{y \in F \mid \exists x \in E \quad A(x) = y\}$$

On démontre alors facilement que $\ker A$ et $\operatorname{Im} A$ sont des sous-espaces vectoriels de E et de F respectivement. On dit qu'alors des applications linéaires sont injectives ou surjectives si

Définition 2.4 (Applications injectives et surjectives) – Une application A est injective si on a l'implication :

$$A(x) = A(y) \implies x = y$$

– Une application A est surjective si on a

$$\operatorname{Im} A = F$$

Là encore, nous avons une proposition qui permet d'identifier directement si une application linéaire est injective, utilisant de façon cruciale le caractère linéaire :

Proposition 2.3 (Critère d'injectivité) Une application linéaire A est injective si et seulement si

$$\ker A = \{0_E\}$$

La plupart du temps, pour démontrer qu'une application A est injective, c'est ce critère précis que nous utiliserons.

Définition 2.5 (Isomorphisme) Enfin, pour clore les définitions, nous dirons qu'une application est un isomorphisme si elle est linéaire (homomorphisme) et qu'elle est inversible. On remarque qu'il est donc équivalent de parler d'une application linéaire injective et surjective.

2.2 Quelques exemples d'applications linéaires

Polynômes Si on note P un polynôme quelconque et ϕ l'application :

$$\phi(P) = P(0)$$

ϕ est une application linéaire de $\mathbb{R}[X]$ (de dimension infinie) dans $\mathbb{R}$ (de dimension 1). ϕ est bien entendue surjective et non injective.

$$\psi(P)(X) = P(X + 1)$$

est une application linéaire injective et surjective d'inverse

$$\psi^{-1}(P)(X) = P(X - 1)$$

Applications données par une matrice On peut définir une application linéaire par l'image d'une base, par exemple l'image de sa base canonique :

$$f(e_1) = v_2 \quad f(e_2) = v_3 \quad f(e_3) = v_1$$

correspond à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La première colonne correspond au codage de l'image de e_1 , la deuxième par le codage de l'image de e_2 et enfin la dernière colonne par le codage de l'image de e_3 . Ce codage se fait en lisant les coordonnées par ligne, les lignes représentant successivement les coordonnées sur la base (v_1, v_2, v_3) .

Exercice 2.1 Les applications suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ sont-elles des endomorphismes de $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$:

$$f_1 : (x_1, x_2) \mapsto (1 + x_1, x_2) \quad f_2 : (x_1, x_2) \mapsto (x_1^2, x_2)$$

$$f_3 : (x_1, x_2) \mapsto (\sin(x_1), x_2) \quad f_4 : (x_1, x_2) \mapsto (x_1 - x_2, 0)$$

Exercice 2.2 Soient E et F des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels de dimension 3 de bases respectivement (e_1, e_2, e_3) et $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$. Soit f l'application linéaire de E dans F définie par

$$f(e_1) = \epsilon_1 - 2\epsilon_2 + 4\epsilon_3 \quad f(e_2) = 2\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 \quad f(e_3) = -3\epsilon_2 + 9\epsilon_3$$

1. Si x s'écrit (x_1, x_2, x_3) dans la base de E , écrire la décomposition de $f(x)$ dans $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$.
2. Déterminer une base de $\Im(f)$ et une base de $\ker(f)$.

2.3 Matrice d'une application linéaire

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension respective n et m , on note alors $(u_1, \dots, u_n)$ une base de E et $(v_1, \dots, v_m)$ une base de F . Toute application linéaire $A \in \mathcal{L}(E, F)$ est déterminée par l'ensemble des images par A des u_i . Ainsi, on sait que

$$A(u_j) = \sum_{i=1}^m a_{i,j} v_i$$

On représente alors ces coefficients $a_{i,j}$ par un tableau rectangulaire (voire carré si $n = m$) constitué de m lignes et n colonnes :

$$M(A) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

On a ici donné la définition d'une matrice issue d'une application linéaire. On peut raisonner de façon inverse en définissant l'application linéaire à partir d'une matrice écrite dans 2 bases $(u_1, \dots, u_n)$ et $(v_1, \dots, v_m)$. Réciproquement, on se donne une matrice $m \times n$ de coefficients $a_{i,j}$ notée $M(A)$, on définit alors l'application linéaire A comme étant l'application linéaire donnée par la définition de $A(u_j)$. Si x se décompose en

$$x = \sum_{j=1}^n x_j u_j$$

alors l'image de x par A noté $A(x)$ est donné par

$$A(x) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right) v_i$$

Ce dernier point est illustré par le théorème suivant :

Théorème 2.1 *Si E est de dimension finie n et F de dimension finie m , il y a bijection entre $\mathcal{L}(E, F)$ et l'ensemble des matrices de taille $n \times m$, ensemble noté $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.*

Exemple 7 *Si on considère l'application linéaire A telle que*

$$A(e_1) = f_1 + f_2 + f_3 \quad A(e_2) = f_1 - f_2$$

alors A a pour matrice

$$M(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ici, on note alors l'image de $x = (x_1, x_2)$ par

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.3 *Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par*

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2 + x_3, 2x_1 - x_2 + 5x_3, x_1 - 3x_2, 3x_1 - 3x_2 + 6x_3)$$

1. Justifier que f est linéaire et donner sa matrice dans les bases canoniques.
2. Déterminer $\Im(f)$ et en donner une base.
3. Déterminer $\ker(f)$ et en donner une base.
4. Donner l'image par f de $F = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_2 + x_3 = 0\}$.
5. Donner l'image par f de l'espace engendré par $(1, 0, 0)$ et $(0, 0, 1)$.

2.4 Produit de deux matrices et composition de deux applications linéaires

Une manière naturelle de définir des opérations avec les applications linéaires, outre l'addition, soustraction et multiplication par un scalaire, peut être d'utiliser la relation de composition. En effet, si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, on peut définir

$$g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$$

qui est une application linéaire de E dans G donnée par l'opération de composition $\circ$. On va essayer de construire une opération sur les matrices de réels qui va correspondre exactement à cette notion de composition d'applications linéaires :

application linéaire	$\longmapsto$	matrice
composition	$\longmapsto$	opération ?

Notons A la matrice de f pour les bases $(e_1, \dots, e_n)$ de E et $(f_1, \dots, f_m)$ de F ainsi que B la matrice de g dans la base de F précédente et $(g_1, \dots, g_q)$ base de G . On souhaite définir l'opération telle que $(A, B) \longmapsto C$ où C est la matrice de $g \circ f$. Si l'on écrit alors la matrice de $g \circ f$, on constate qu'il suffit de calculer :

$$g \circ f(e_i) = g(f(e_i)) = g\left(\sum_{j=1}^m a_{j,i} f_j\right) = \sum_{j=1}^m a_{j,i} g(f_j)$$

Par ailleurs, on a bien sûr :

$$g(f_j) = \sum_{k=1}^q b_{k,j} g_k$$

En fin de compte, on a l'égalité :

$$g \circ f(e_i) = \sum_{j=1}^m \left(a_{j,i} \sum_{k=1}^q b_{k,j} g_k \right)$$

En réorganisant la somme précédente en isolant chaque terme g_k , on obtient :

$$g \circ f(e_i) = \sum_{k=1}^q \left(\sum_{j=1}^m b_{k,j} a_{j,i} \right) g_k$$

Ainsi, si l'on pose

$$c_{k,i} = \sum_{j=1}^m b_{k,j} a_{j,i}$$

on a alors $g \circ f(e_i) = \sum_{k=1}^q c_{k,i} g_k$ et $C = (c_{k,i})$ est bien la matrice de $g \circ f$. Cette longue construction permet de définir naturellement l'opération recherchée, notée multiplicativement, par

$$B.A = B \times A = C$$

où C a pour terme général $(c_{k,i})$ définit précédemment. Par construction, si A désigne la matrice de f et B celle de g , alors la matrice $B \times A$ représente la matrice de $g \circ f$ alors que $A.B$ désignerait la matrice de $f \circ g$ si celle ci existait.

Théorème 2.2 *Étant données deux matrices A et B de taille respectivement $(n \times m)$ et $(m \times p)$, on peut définir la matrice $A \times B$ de taille $(n \times p)$ par $C = A \times B$ où le terme général $c_{i,j}$ est donné par*

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^m a_{i,k} b_{k,j}$$

Remarque 4 (Attention) *En général, on n'a pas la commutativité du produit : $A \times B \neq B \times A$. Par ailleurs, si les dimensions m ne coïncident pas sur le nombre de colonne de A et celles de B , la multiplication n'a alors pas de sens.*

Enfin, on voit immédiatement que l'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel muni de la loi de multiplication par un scalaire et l'addition « standard » des matrices.

2.5 Définitions sur les matrices

On donne dans ce paragraphe quelques définitions sur les matrices : matrice identité, transposée, matrice inverse et inversible, matrice de passage et enfin opération élémentaire sur les matrices.

Définition 2.6 *On appelle matrice identité l'unique matrice $Id_{n,n}$ qui vérifie*

$$A \times Id_{n,n} = Id_{n,n} \times A$$

Cette matrice est donnée par

$$Id_{n,n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice identité est nécessairement carrée (de taille n par n).

On définit la matrice transposée de la matrice A par

Définition 2.7 (Transposée) *Si $A = (a_{i,j})$, on pose (et note) $B = A^t = (b_{i,j})$:*

$$B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \dots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \dots & a_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1,n} & \dots & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire $b_{i,j} = a_{j,i}$.

La notion de matrice inverse est plus compliquée à donner, dans la mesure où il n'existe pas vraiment de technique applicable pour en donner une formule explicite :

Définition 2.8 (Matrice inversible, matrice inverse) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, on dit que A est inversible lorsqu'il existe une matrice B notée en réalité $B = A^{-1}$ vérifiant :

$$A \times B = B \times A = Id$$

Dans ce cas, la matrice B est appelée matrice inverse de A .

Dans le cas particulier de l'identité, Id est sa propre matrice inverse. Attention, on remarque ici qu'une matrice ne peut être inversible que si elle est carrée !

Exercice 2.4 Vérifier rapidement que l'inverse de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est donnée par

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.5 La matrice suivante est-elle inversible ?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On verra dans un paragraphe qui suivra une méthode pratique (algorithme) pour calculer l'inverse d'une matrice carrée, quand cet inverse existe.

Enfin, notons quelques propriétés fondamentales sur la multiplication des matrices

Proposition 2.4 Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on a alors $A(B+C) = AB+AC$. Enfin, on a $A(BC) = (AB)C$ si les dimensions des matrices sont compatibles avec les opérations précédentes.

Exercice 2.6 Parmi les cinq produits ci-dessous, lesquels ont un sens ? Dans ce cas, calculer alors les produits.

$$\begin{aligned} & (1 \quad 2 \quad 3) \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} (1 \quad 2 \quad 3) \\ & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.6 Changement de bases et Matrices de passage

Dans la pratique, il apparaît parfois judicieux de passer d'un système de coordonnées à un autre suivant les besoins. Il est donc nécessaire de maîtriser les outils permettant ces passages.

Si E désigne un espace vectoriel de dimension finie n , et x un vecteur de coordonnées $(\alpha_i, \dots, \alpha_n)$ dans une base $(e_1, \dots, e_n)$:

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$$

si $(\alpha'_i, \dots, \alpha'_n)$ sont les coordonnées de ce même vecteur dans une autre base $(e'_1, \dots, e'_n)$, on cherche une relation entre les coordonnées dans l'ancienne base et celle dans la nouvelle base.

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha'_i e'_i$$

Supposons connue les coordonnées des vecteurs e'_i dans la première base

$$e'_j = \sum_{i=1}^n p_{i,j} e_i$$

Exercice 2.7 Soit $E = \mathbb{R}^2$, on considère la base canonique $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ et $\mathcal{B}' = \{(1, 1), (1, -1)\}$. Vérifier que $\mathcal{B}'$ est une base. Quelle est la matrice de passage P entre $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

On a donc défini une matrice P représentant l'application identité de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}'$ d'éléments $p_{i,j}$. Cette matrice permet de définir la formule de changement de base :

$$\alpha_j = \sum_{i=1}^n p_{i,j} \alpha'_i$$

En terme matriciel, si X désigne les coordonnées dans l'ancienne base, et X' celles dans la nouvelle base, on a alors

$$X = PX'$$

Remarque 5 On a ici la relation entre les anciennes coordonnées données en fonction des nouvelles coordonnées. Ce n'est pas forcément la façon la plus simple de se souvenir de cette formule, mais le terme "matrice de passage" est justifié par l'opération de changement de base.

On a alors le théorème suivant :

Théorème 2.3 La matrice P ayant pour colonne j les coordonnées de e'_j dans la base $\mathcal{B}$ est inversible. On l'appelle matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}'$. De plus, la formule de changement de base précédente peut s'inverser grâce à la formule :

$$\alpha_j = \sum_{i=1}^n (P^{-1})_{i,j} \alpha'_i$$

On obtient donc la relation liant les anciennes coordonnées aux nouvelles

Exercice 2.8 Utiliser ce théorème pour donner la matrice inverse P^{-1} de P en exprimant les vecteurs de $\mathcal{B}$ en fonction de ceux de $\mathcal{B}'$.

On peut alors utiliser ce résultat pour obtenir l'effet d'un changement de base pour les applications linéaires :

Théorème 2.4 Soit P la matrice de passage de la base $(e_1, \dots, e_n)$ vers $(e'_1, \dots, e'_n)$, Q la matrice de passage de la base $(v_1, \dots, v_n)$ vers $(v'_1, \dots, v'_n)$, et si M désigne la matrice d'une application linéaire f , dans les bases $(e_1, \dots, e_n)$ et $(v_1, \dots, v_n)$. On cherche alors la matrice M' de f dans les bases $(e'_1, \dots, e'_n)$ et $(v'_1, \dots, v'_n)$. M est alors donnée par

$$M' = Q^{-1}MP$$

2.7 Matrices et systèmes linéaires

Dans le cas où $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, X est un vecteur colonne à n lignes et Y un vecteur colonne à m lignes, chercher le vecteur X satisfaisant

$$AX = Y$$

revient à résoudre un système linéaire en les variables $(x_i)_{i=1..n} = X$, avec comme coefficients les $a_{i,j}$ donnés dans A . La donnée d'un système linéaire se résume donc à la donnée de A et de Y . Dans le cas particulier intéressant où A est inversible, la solution du système linéaire est donnée directement par la relation

$$X = A^{-1}Y$$

Pour résoudre les systèmes linéaires, deux options sont alors possibles :

1. Un seul système linéaire de matrice A est à résoudre et dans ce cas, on utilise l'algorithme du pivot de Gauss « connu ».
2. Plusieurs systèmes linéaires de matrice A sont à résoudre et dans ce cas, il est plus intelligent de calculer l'inverse de A et utiliser simplement l'expression $X = A^{-1}Y$ pour obtenir directement l'expression des solutions. Voici comment alors procéder.
 - (a) On sait que si A est inversible, elle est alors matrice de passage d'une base $(e_1, \dots, e_n)$ dans $(e'_1, \dots, e'_n)$.

- (b) On écrit formellement ces relations.
- (c) On exprime alors les vecteurs e_i en dans la base $(e'_1, \dots, e'_n)$ grâce à l'algorithme du pivot de Gauss.
- (d) On traduit ces relations dans l'expression de la matrice P^{-1} , matrice où la colonne j représente les coordonnées de e_j dans la base $(e'_1, \dots, e'_n)$. Cette matrice est alors l'inverse de P .

Exercice 2.9 *Inverser la matrice suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Exercice 2.10 *Soit A la matrice donnée par*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer $A^3 - A$, en déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1} .

3 Opération élémentaires sur les matrices

3.1 Définitions

Définition 3.1 *Soit M une matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. Notons $L_1, \dots, L_n$ les lignes de M et $C_1, \dots, C_m$ les colonnes de M . Soit λ un réel quelconque, si i et j désignent deux entiers, on appelle*

- *Opération élémentaire sur les lignes de M l'action qui consiste à additionner la ligne λL_j à une ligne L_i de M .*
- *Opération élémentaire sur les colonnes de M l'action qui consiste à additionner la colonne λC_j à une colonne C_i de M .*

Définition 3.2 *Soit $E_{i,j}$ les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont tous nuls sauf celui à l'intersection de la ligne i et la colonne j qui vaut 1, alors les $(E_{i,j})_{i,j=1\dots n}$ forment une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

- *Supposons $i \neq j$, on appelle matrice de transvection la matrice $T_{i,j}(\lambda) = Id + \lambda E_{i,j}$.*

- On appelle matrice de dilatation la matrice $D_i(\lambda)$ qui est diagonale et dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à 1 sauf le i -ième qui vaut λ .

Proposition 3.1 Les matrices $D_i(\lambda)$ et $T_{i,j}(\lambda)$ sont des matrices inversibles d'inverse respectivement une matrice de dilatation et une matrice de transvection.

Théorème 3.1 Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soient i, j deux entiers entre 1 et n , soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $T_{i,j}$ et D_i deux matrices de transvection et dilatation, alors

- La matrice $MT_{i,j}(\lambda)$ s'obtient en remplaçant dans M la j -ième colonne C_j par $C_j + \lambda C_i$.
- La matrice $T_{i,j}(\lambda)M$ s'obtient en remplaçant dans M la i -ième ligne L_i par $L_i + \lambda L_j$.
- La matrice $MD_i(\lambda)$ s'obtient en remplaçant dans M la i -ième colonne C_i par λC_i .
- La matrice $D_i(\lambda)M$ s'obtient en remplaçant dans M la i -ième ligne L_i par λL_i .

Ces opérations élémentaires jouent un rôle important dans tout ce qui a trait à la résolution de système linéaire et aux déterminants. En effet, en y regardant de plus près, on constate que effectuer un pivot de Gauss, ce n'est rien d'autre qu'utiliser ces opérations élémentaires à gauche ou à droite de la matrice du système pour arriver à un système triangulaire supérieur.

3.2 Calcul de rang d'une matrice

Il y a une application directe de ces techniques dans le calcul du rang de la matrice A via ces opérations élémentaires.

Théorème 3.2 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, il existe une matrice inversible $G \in \mathcal{GL}_m(\mathbb{R})$ telle que GA soit réduite, c'est-à-dire triangulaire supérieure avec des termes sur la diagonale égaux à 0 ou 1. Toutes les matrices GA obtenues de cette manière ont le même rang qui est la dimension de l'image de l'application linéaire associée à A .

En pratique, les applications qu'on utilisera pour trouver le rang des matrices sont les applications associées aux matrices élémentaires précédemment définies. En combinant multiplication à gauche et à droite par ces matrices, on parvient à écrire toute matrice sous la forme triangulaire supérieure « échelonnée ». Le rang de la matrice est alors le nombre d'échelons formés par le pivot de Gauss sur cette matrice.

Exercice 3.1 Soit A la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer par la méthode du pivot de Gauss le rang de la matrice A .

Exercice 3.2 Chercher les rangs des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -3 & -1 & 7 \\ -2 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.3 Déterminer en fonction du paramètre réel m le rang de

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ m & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & m & 2 \end{pmatrix}$$

3.3 Théorème du Rang

Enfin, on conclut la section par un théorème dont l'utilisation peut grandement simplifier le calcul de la valeur d'un rang d'une matrice. Ce théorème existe d'abord en « version » application linéaire :

Théorème 3.3 (Théorème du rang) Soit E un espace vectoriel de dimension finie n , et soit f une application linéaire de E dans E . Alors, f vérifie la relation

$$\text{Rg}f = \dim E - \dim \ker f$$

Ce théorème a également un pendant matriciel :

Théorème 3.4 (Théorème du rang) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors on a

$$\text{Rg}A = \dim E - \dim \ker A$$

Exercice 3.4 Reprendre les calculs des rangs précédents en utilisant le théorème précédent.

3.4 Matrices équivalentes et rang de matrices

Deux matrices A et B sont dites équivalentes s'il existe des matrices inversibles P et Q telles que $B = QAP$. Il n'est pas nécessaire ici que les matrices A et B soient carrées. On a alors le théorème qui relie matrices équivalentes et rang.

Théorème 3.5 Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.

Autrement dit, le rang d'une matrice détermine une classe d'équivalence de matrices qui est constituée de toutes les matrices qu'on peut obtenir en effectuant des changements de base.

Enfin, voici deux propriétés bien pratique sur le rang des matrices :

Proposition 3.2 Une matrice A ainsi que sa transposée ont le même rang.

Proposition 3.3 Pour $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$ engendré par les colonnes de A est égale à la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par les transposées des lignes de A .

4 Déterminant d'un système de vecteurs et de matrices

4.1 Introduction

Définition 4.1 (Déterminant) Le déterminant est une application n -linéaire alternée définie sur E^n où $\mathbb{R}^n = E$ telle que si $e_1, \dots, e_n$ est la base canonique de E , alors

$$\det(e_1, \dots, e_n) = 1$$

Par ailleurs, le déterminant est l'unique forme linéaire alternée vérifiant ceci. Par ailleurs, on remarquera qu'il y a autant de vecteurs que la dimension de l'espace vectoriel E .

Forme linéaire Cela signifie que $\det(u + v, e_2, \dots, e_n) = \det(u, e_2, \dots, e_n) + \det(v, e_2, \dots, e_n)$

Forme alternée Cela signifie que $\det(a^1, a^2, \dots, a^k, a^k, \dots, a^{n-1}) = 0$ En reformulant cette précédente définition, on a donc que le déterminant dépend linéairement de chacun des vecteurs. Lorsque deux vecteurs sont égaux, le déterminant est alors nul.

Proposition 4.1 D'après la définition précédente de forme alternée, on constate immédiatement que :

–

$$\forall (u_1, \dots, u_{n-1}, u_n) \quad \det(u_1, u_2, \dots, u_j, \dots, u_k, \dots, u_n) = -\det(u_1, u_2, \dots, u_k, \dots, u_j, \dots, u_n)$$

– Pour tout entiers j et k distincts :

$$\det(u_1, \dots, u_j + \lambda u_k, u_{j+1}, \dots, u_n) = \det(u_1, \dots, u_j, u_{j+1}, \dots, u_n)$$

Plus généralement, on a la proposition qui caractérise la liberté d'un système de n vecteurs :

Proposition 4.2 Un système de n vecteurs $u_1, \dots, u_n$ est libre dans $\mathbb{R}^n$ si et seulement si

$$\det(u_1, \dots, u_n) \neq 0$$

4.2 Déterminant d'une matrice carrée

Définition 4.2 *Le déterminant d'une matrice carrée est donné par le déterminant de ces n vecteurs colonnes. Ainsi, contrairement au cas du rang d'une matrice, il est nécessaire pour calculer un déterminant que cette matrice soit carrée !*

Grâce à cette définition, ainsi qu'à la liste de propriétés précédentes, on montre que

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Avant de reparler de méthode de calculs pour les déterminants des matrices, voici avant tout quelques points clefs théoriques sur le déterminant :

Proposition 4.3

$$\det Id = 1$$

Soit A une matrice carrée, alors

$$\det {}^t A = \det A$$

Ainsi, le déterminant d'une matrice A dépend également linéairement de chaque ligne de A .

Proposition 4.4 *Soit A, B matrices carrées de taille identique, on a alors*

$$\det(A \times B) = \det A \times \det B$$

Notamment, si A et B sont semblables, c'est à dire s'il existe une matrice de passage P de A vers B , alors A et B ont même déterminant.

Enfin, on a une propriété qui caractérise l'inversibilité de la matrice A :

Proposition 4.5 *A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Dans ce cas, on a alors*

$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$$

Exercice 4.1 *Calculer le déterminant d'une matrice de rotation d'angle θ .*

4.3 Méthodes de calcul du déterminant

Même s'il existe une formule théorique exacte qui donne l'expression du déterminant de A en fonction de ses coefficients, cette formule ne sera pas donnée ici au profit de méthodes de calcul applicables pour ce calcul de déterminant.

4.3.1 Développement d'un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne :

On donne une première technique, valable pour les matrices de petite taille, pour calculer le déterminant. Cette technique est basée sur la propriété suivante :

Proposition 4.6 (Développement par rapport à une ligne) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$$

pour tout i fixé et $A_{i,j}$ désigne la matrice obtenue en « barrant » la ligne i et la colonne j .

Proposition 4.7 (Développement par rapport à une colonne) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$$

pour tout j fixé.

On peut donc choisir de développer soit par rapport à une ligne, soit par rapport à une colonne, peut être plusieurs fois, afin d'arriver à des calculs de déterminant de matrice 2×2 . Ceci est valable uniquement pour des matrices de petite taille (3 ou 4).

Exercice 4.2 Calculer le déterminant des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

4.3.2 Calcul du déterminant par la méthode du pivot de Gauss

Commençons tout d'abord par remarquer qu'il existe un cas particulièrement simple dans lequel il est facile de calculer $\det A$.

Proposition 4.8 (Cas des matrices triangulaires) Pour une matrice triangulaire supérieure A s'écrivant

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

son déterminant s'écrit simplement

$$\det A = a_{1,1} \times a_{2,2} \times \dots \times a_{n,n}$$

Une méthode efficace va donc consister à réduire la matrice originale à une matrice diagonale ou triangulaire supérieure. On donnera du déterminant de la première matrice une expression directement en fonction du produit des termes diagonaux de la dernière matrice et des opérations élémentaires effectuées pour arriver à réduire la matrice originale à cette forme.

Exercice 4.3 Reprendre les calculs précédents avec la méthode du pivot pour calculer les déterminants. Calculer également les déterminants de

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Exercice 4.4 En utilisant le déterminant, déterminer si les 4 vecteurs suivants sont indépendants :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5 Algorithme du pivot de Gauss