TP 12 - Chaîne de Markov (1)

1 Un petit modèle de consommation

Les consommateurs de 3 produits sont répartis respectivement en : 50% pour le produit P1, 30% pour P2 et 20% pour P3. Après chaque mois 60% restent fidèles à P1, 70% restent fidèles à P2, et 90% restent fidèles à P3. Les autres se réorientent de façon équiprobable entre les 2 produits restants.

1. On modélise ceci sous forme d'une chaîne de Markov à 3 états. On note μ_0 la distribution de probabilité initiale et P la matrice de transition.
   (a) Ecrire μ_0 et P.
   (b) Montrer que P est récurrente irréductible et apérodique.
2. (a) Faire une simulation d'une telle chaîne de Markov X_0, $X_1, \dots X_n$, $\dots$.
   (b) Écrire un programme Matlab cdm.m prenant en argument une matrice de transition P et un entier n et renvoyant un vecteur de n réalisations de la Chaîne de Markov de matrice de transition P.
3. (a) A l'aide de la fonction `eig` de Matlab, déterminer la probabilité invariante μ pour la chaîne de Markov de matrice de transition P.
   (b) Automatiser la procédure en écrivant une fonction dist_stat.m renvoyant le vecteur de distribution stationnaire en fonction de la matrice de transition P.
4. (a) En notant $\mu_0 P^n$ la répartition des consommateurs au n-ième mois, quelle est sa limite lorsque n tend vers l'infini.
   (b) Tracer sur un même graphique les 3 courbes $n \mapsto (\mu_0 P^n)(i)$ pour $i = 1, 2$ et 3.
   (c) Représenter sur un autre graphique la vitesse de convergence, c'est à dire tracer la fonction $n \longmapsto |\mu_0 P^n - \mu|_{L^1}$.

2 Modèle de diffusion d'Ehrenfest

N particules sont placées dans 2 récipients A et B. A chaque instant, on choisit une particule au hasard et on la change de récipient. Soit X_n le nombre de particules dans le récipient A au temps n.

1. Démontrer que X_n est une chaîne de Markov. Quelle est sa matrice de transition ?
2. Quelles sont les caractéristiques de la chaîne de Markov ?
3. Montrer que la loi binomiale donnée par $b_N(k) = C_N^k 2^{-N}$ pour $0 \leq k \leq N$ est réversible pour la chaîne de Markov. En déduire la distribution invariante pour X_n. On notera également $b_N = \mu$.
4. Programmer une fonction Matlab urne.m simulant une telle chaîne de Markov X_0, X_1,...X_n,... (en partant par exemple d'une distribution initiale μ_0 qui est une masse de dirac en un certain k_0). On passera en arguments à cette fonction l'entier n ainsi que l'initialisation k_0.

5. Tracer sur un même graphique l'histogramme empirique des (X_i) obtenus à la question précédente, et la distribution de probabilité invariante b_N. Quel résultat illustre-t-on ainsi ?
6. A-t-on convergence de X_n vers μ ? On définit la mesure μ_n par

$$\mu_n = \frac{(\mu_0 + \mu_0 P + \cdots + \mu_0 P^n)}{n}$$

   Tracer sur le même graphique les courbes $n \longmapsto |\mu_0 P^n - \mu|_{L^1}$ et $n \longmapsto |\mu_n - \mu|_{L^1}$. Qu'observe-t-on ?
7. On définit T_{ll} le temps de retour en l par

$$T_{ll} = \inf\{n \geq 0, X_n = l | X_0 = l\}$$

   Comparer par simulation $\mathbb{E}[T_{ll}]$ et $\mu(l)$.