PC 2 : Tribus et espaces de probabilité - Variables aléatoires réelles - Densités de probabilité

1 Tribus et espaces mesurés

Exercice 1 (Boréliens et mesure de Lebesgue)**.** *On rappelle que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la plus petite tribu de $\mathbb{R}$ qui contient tous les intervalles de la forme $]-\infty, a]$ avec $a \in \mathbb{R}$.*

1. *Montrer que $\{a\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.*
2. *Montrer que tout sous-ensemble dénombrable de $\mathbb{R}$ est borélien et de mesure de Lebesgue nulle.*
3. *Soit $N \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ un ensemble de mesure de Lebesgue nulle. Montrer que N^c est dense dans $\mathbb{R}$.*

Solution.

1. *En passant au complémentaire, on voit que $]a, +\infty[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. En considérant $I_n =]a_n, +\infty[$, avec $a_n = a - 1/n$, et en remarquant que $\cap_{n\in\mathbb{N}^*} I_n = [a, +\infty[$ on conclut que les intervalles de la forme $[a, +\infty[$ sont aussi dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Enfin, comme $\{a\} = [a, +\infty[\cap]-\infty, a]$ on conclut que $\{a\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*
   Remarque : On voit par des arguments analogues que la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ contient tous les intervalles de $\mathbb{R}$. On en déduit facilement qu'elle contient tous les ensembles ouverts. En effet, si O est un ensemble ouvert de $\mathbb{R}$, alors on peut écrire $O = \cup_{x,y\in O\cap\mathbb{Q}}]x, y[$ et cette union porte sur un ensemble d'indices dénombrable. Enfin, en passant au complémentaire, on conclut que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ contient aussi tous les ensembles fermés de $\mathbb{R}$.
2. *Si A est un ensemble dénombrable, alors il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_n \neq x_m$ pour tout $n \neq m$ et $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. En écrivant $A = \cup_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}$ et en utilisant la question précédente, on voit que $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Notons λ la mesure de Lebesgue ; on a alors par union disjointe $\lambda(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda(\{x_n\})$. Mais par définition de la mesure de Lebesgue, $\lambda(\{a\}) = \lambda([a, a]) = a - a = 0$. On en déduit que $\lambda(A) = 0$.*
3. *Pour montrer la densité de N^c dans $\mathbb{R}$, il faut montrer que pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$ de la forme $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$, on a $I \cap N^c \neq \emptyset$. Si ce n'était pas le cas, on aurait $I \subset N$ et donc $\lambda(I) \leq \lambda(N) = 0$. On aurait alors $\lambda(I) = 0$ ce qui contredit le fait que $\lambda(I) = 2\varepsilon > 0$. On conclut que N^c est bien dense dans $\mathbb{R}$.*

Exercice 2 (Tribu engendrée par une fonction)**.** *On considère une fonction $X : \Omega \to E$. Si $\mathcal{E}$ est une tribu sur E, montrer que*

$$\mathcal{A} = \{X^{-1}(A) : A \in \mathcal{E}\}$$

est une tribu sur Ω.

Solution. *Montrons que $\mathcal{A}$ est une tribu :*

— $\Omega = X^{-1}(E)$ *avec* $E \in \mathcal{E}$ *donc* $\Omega \in \mathcal{A}$.

— *Soit $B \in \mathcal{A}$. Par définition, il existe $A \in \mathcal{E}$ tel que $B = X^{-1}(A)$. Mais,*

$$B^c = \left(X^{-1}(A)\right)^c = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \notin A\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A^c\} = X^{-1}(A^c).$$

Comme $\mathcal{E}$ est une tribu et $A \in \mathcal{E}$, on a aussi $A^c \in \mathcal{E}$ et donc $B^c \in \mathcal{A}$.

— *Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $A_n \in \mathcal{E}$ tel que $B_n = X^{-1}(A_n)$. Mais*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X^{-1}(A_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A_n\} = \left\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right\} = X^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right).$$

Comme $\mathcal{E}$ est une tribu et $A_n \in \mathcal{E}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a aussi $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{E}$ et donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}$.

Exercice 3 (Tribu engendrée par une classe de parties)**.**

1. *Montrer que si $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque de tribus sur un espace Ω, alors $\mathcal{A} = \cap_{i\in I}\mathcal{A}_i$ est une tribu sur Ω.*
2. *Soit $\mathcal{C}$ une famille de sous-ensembles d'un espace Ω. Montrer en utilisant la question précédente qu'il existe une plus petite tribu contenant $\mathcal{C}$. Cette tribu est appelée 'tribu engendrée par $\mathcal{C}$' et est notée $\sigma(C)$.*
3. *Soit $\mathcal{C} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ une partition d'un espace Ω. Montrer que*

$$\sigma(\mathcal{C}) = \{\cup_{i\in I} A_i : I \subset \{1, \ldots, n\}\}.$$

Solution.

1. *Comme $\Omega \in \mathcal{A}_i$ pour tout $i \in I$, on a $\Omega \in \cap_{i\in I}\mathcal{A}_i$. Par ailleurs, si $A \in \mathcal{A}_i$ pour tout $i \in I$, alors par stabilité par passage au complémentaire, on a aussi $A^c \in \mathcal{A}_i$ pour tout $i \in I$ et donc $A^c \in \cap_{i\in I}\mathcal{A}_i$. Pour finir, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments à valeurs dans $\mathcal{A}_i$ pour tout $i \in I$, alors par stabilité par union dénombrable, $\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n \in \mathcal{A}_i$ pour tout $i \in I$. Par suite, $\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n \in \cap_{i\in I}\mathcal{A}_i$. En conclusion, $\cap_{i\in I}\mathcal{A}_i$ est bien une tribu.*
2. *Notons I l'ensemble de toutes les tribus contenant $\mathcal{C}$. Cet ensemble est non vide car $\mathcal{P}(\Omega) \in I$. D'après la question précédente, $\mathcal{A}_o = \cap_{\mathcal{A}\in I}\mathcal{A}$ est une tribu contenant $\mathcal{C}$. Réciproquement, si $\mathcal{A}$ est une tribu contenant $\mathcal{C}$, alors par définition de I, on a $\mathcal{A} \in I$ et donc $\mathcal{A}_o \subset \mathcal{A}$. Ainsi, $\mathcal{A}_o$ est la plus petite tribu contenant $\mathcal{C}$.*
3. *Il est clair que pour tout $I \subset \{1, \ldots, n\}$, on a $\cup_{i\in I}A_i \in \sigma(\mathcal{C})$. Par conséquent $\mathcal{C} \subset \mathcal{A} := \{\cup_{i\in I}A_i : I \subset \{1, \ldots, n\}\} \subset \sigma(\mathcal{C})$. Pour conclure, il suffit de montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu. La classe $\mathcal{A}$ contient clairement Ω (obtenu en prenant $I = \{1, \ldots, n\}$) et est clairement stable par union (dénombrable). Elle est aussi stable par passage au complémentaire. En effet, puisque $\mathcal{C}$ est une partition, on a*

$$(\cup_{i\in I}A_i) \cup (\cup_{j\in I^c}A_j) = \Omega \qquad \text{et} \qquad (\cup_{i\in I}A_i) \cap (\cup_{j\in I^c}A_j) = \emptyset$$

et donc $(\cup_{i\in I}A_i)^c = \cup_{j\in I^c}A_j \in \mathcal{A}$, ce qui complète la preuve.

Exercice 4 (Un ensemble non mesurable)**.** *On considère la relation d'équivalence $\sim$ sur $\mathbb{R}$ définie par :*

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad x - y \in \mathbb{Q}.$$

On note $= (\mathcal{C}_i)_{i\in I}$ l'ensemble des classes d'équivalence pour cette relation où I est un ensemble d'indexes fixé par la relation $\sim$. Ainsi, si $x \in \mathcal{C}_i$ alors $\mathcal{C}_i = x + \mathbb{Q}$.

1. *Justifier que pour chaque classe d'équivalence $\mathcal{C}_i$ on a $\mathcal{C}_i \cap [0, 1] \neq \emptyset$.*
2. *Grâce à* l'axiome du choix, *on construit une famille $(v_i)_{i\in I}$ telle que $v_i \in \mathcal{C}_i \cap [0, 1]$, pour tout $i \in I$. L'ensemble $V = \{v_i : i \in I\}$ est appelé* ensemble de Vitali. *Nous allons montrer dans les questions suivantes que V n'est pas un ensemble borélien.* Pour cela nous allons raisonner par l'absurde et supposer que V est un ensemble borélien. *Dans ce qui suit, nous noterons λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.*

(a) *On pose* $A = \cup_{r\in[-1,1]\cap\mathbb{Q}} V + r$. *Montrer que si* V *est borélien alors* A *l'est aussi.*

(b) *Montrer que* $\lambda(A) \leq 3$ *et en déduire que* $\lambda(V) = 0$ *puis que* $\lambda(A) = 0$.

(c) *Montrer que* $[0,1] \subset A$ *et conclure.*

Solution. 1. *Soit* $x \in \mathbb{R}$ *; on veut montrer qu'il existe* $r \in \mathbb{Q}$ *tel que* $x + r \in [0,1]$. *Il suffit de prendre* $r = -E(x)$, *où* $E(x) \in \mathbb{Z}$ *est la partie entière de* x. *En effet par définition de celle-ci on a* $E(x) \leq x < E(x) + 1$ *et donc* $x - E(x) \in [0,1[$.

2. (a) *Si* V *est borélien, alors son translaté* $V+r = \{v+r : v \in V\}$ *est encore un borélien. Cela vient du fait que la tribu borélienne est invariante par translation. Comme* $[-1,1]\cap\mathbb{Q}$ *est un ensemble dénombrable, la propriété de stabilité par union dénombrable de la tribu borélienne entraîne que* A *est encore un borélien.*

(b) *Comme* $V \subset [0,1]$, *on a* $V + r \subset [r, r+1] \subset [-1,2]$ *si* $r \in [-1,1]$. *Par conséquent,* $A \subset [-1,2]$. *Comme* A *est borélien, sa mesure de Lebesgue est bien définie et on a* $\lambda(A) \leq 3$. *On remarque par ailleurs que* $(V + r) \cap (V + s) = \emptyset$ *pour tous* $r \neq s \in [-1,1]\cap\mathbb{Q}$. *En effet, si ce n'était pas le cas, il existerait* $i, j \in I$ *tels que* $v_i + r = v_j + s$. *On aurait donc* $v_i - v_j \in \mathbb{Q}$ *et donc* $v_i \sim v_j$. *On aurait donc* $\mathcal{C}_i = \mathcal{C}_j$ *ce qui entraînerait* $v_i = v_j$, *ce qui est impossible puisque* $r \neq s$. *Finalement, par additivité dénombrable et invariance par translation de la mesure de Lebesgue, on aurait*

$$\lambda(A) = \sum_{r\in[-1,1]\cap\mathbb{Q}} \lambda(V + r) = \sum_{r\in[-1,1]\cap\mathbb{Q}} \lambda(V) = (+\infty)\lambda(V).$$

Or, par ailleurs, on a vu que $\lambda(A) \leq 3$, *on en déduit que* $\lambda(V) = 0$.

(c) *Soit* $x \in [0,1]$, *il existe* $v \in V$ *et* $r \in \mathbb{Q}$ *tel que* $x - v = r$. *Comme* $x \in [0,1]$ *et* $v \in [0,1]$, *on a* $r = x - v \in [-1,1]$ *et donc* $x = v + r \in A$ *ce qui montre que* $[0,1] \subset V$. *Si* V *est un borélien, on a* $\lambda(V) \geq 1$ *ce qui contredit* $\lambda(V) = 0$. V *n'est pas un borélien.*

2 Variables aléatoires réelles

Exercice 5. *Calculer l'espérance et la variance des lois uniforme, exponentielle et gaussienne.*

Solution. 1. *Loi uniforme,* $U \sim \mathcal{U}([a,b])$ *:*

$$\mathbb{E}(U) = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{a+b}{2}, \quad \mathbb{E}(U^2) = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx = \frac{a^2+ab+b^2}{3},$$
$$Var(U) = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

2. *Loi exponentielle,* $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ *:*

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx \underset{[IPP]}{=} \frac{1}{\lambda}, \quad \mathbb{E}(X^2) = \int_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx \underset{[IPP]}{=} \frac{2}{\lambda^2}$$
$$Var(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

3. *Loi gaussienne,* $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ *:*

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu + \sigma u}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \mu,$$
$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{(\mu + \sigma u)^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \mu^2 + \sigma^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{u^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Par ailleurs, par intégration par partie,

$$1 = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \int_{\mathbb{R}} \frac{u^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

On en déduit $Var(X) = \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2$.

Exercice 6 (Variables exponentielles)**.** *Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles distribuée selon une loi exponentielle de paramètre 1.*

1. *Montrer que $U = \frac{1}{\lambda}X$ suit une loi exponentielle de paramètre λ.*
2. *Donner la loi de la variable aléatoire $V := 1 + E(X)$, où $E(\cdot)$ désigne la partie entière.*
3. *Donner la loi de $W = \sqrt{X}$.*
4. *Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Y := \min(X, a)$, où $a > 0$. La variable Y a-t-elle une densité ?*

Solution. 1. *Calculons la fonction de répartition de U : si $t \in \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{P}(U \leq t) = \mathbb{P}(X \leq \lambda t) = (1 - e^{-\lambda t})\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(\lambda t).$$

On reconnait bien la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre λ, donc $U \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

2. *On remarque que V est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et est donc une variable aléatoire discrète. Pour tout $k \geq 1$, on a*

$$\mathbb{P}(V = k) = \mathbb{P}(E(X) = k-1) = \mathbb{P}(X \in [k-1, k[) = \int_{k-1}^{k} e^{-u}\, du = e^{-(k-1)} - e^{-k} = \left(\frac{1}{e}\right)^{k-1}\left(1 - \frac{1}{e}\right).$$

On conclut que V suit une loi géométrique de paramètre $p = 1 - \frac{1}{e}$.

3. *Pour déterminer la loi de $W = \sqrt{X}$, calculons sa fonction de répartition : si $t \geq 0$,*

$$F_W(t) = \mathbb{P}(\sqrt{X} \leq t) = \mathbb{P}(X \leq t^2) = 1 - e^{-t^2},$$

et si $t \leq 0$, $F_W(t) = 0$. On remarque que

$$F_W(t) = \int_{-\infty}^{t} 2ue^{-u^2}\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(u)\, du, \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, W a pour densité $f_W(u) = 2ue^{-u^2}\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(u)$, $u \in \mathbb{R}$. Il s'agit de la loi $\mathcal{W}(2, 1)$ (loi de Weibull).

4. *Calculons la fonction de répartition de $Y = \min(X, a)$ où $a \geq 0$. Si $t \leq 0$, alors $F_Y(t) = 0$. Si $t \in [0, a[$, alors*

$$\{Y \leq t\} = \{\min(X, a) \leq t\} = \{X \leq t\}$$

et donc

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(X \leq t) = 1 - e^{-t}.$$

Enfin, si $t \geq a$, alors

$$\{Y \leq t\} = \{\min(X, a) \leq t\} = \Omega$$

et donc $F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = 1$. En conclusion,

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & si\ t \leq 0 \\ 1 - e^{-t} & si\ t \in]0, a[\\ 1 & si\ t \geq a \end{cases}$$

On remarque en particulier que F_Y est discontinue en a. La variable Y ne peut donc pas avoir de densité, car la fonction de répartition des variables à densité est toujours continue en tout point.
Remarque : On rappelle que la valeur du saut en a détermine la masse accordée au singleton $\{a\}$. En effet, si t_n est une suite strictement croissante convergeant vers a, alors par la propriété d'intersection décroissante

$$F_Y(a) - F_Y(a^-) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Y \in]t_n, a]) = \mathbb{P}(Y \in \{a\}).$$

Ici, on trouve donc $\mathbb{P}(Y = a) = e^{-a}$.

Exercice 7 (Loi uniforme)**.** *Soit U une v.a. uniforme sur $[0,1]$. On définit $X = \min(U, 1-U)$ et $Y = \max(U, 1-U)$. Trouver les lois de X et Y. Calculer $\mathbb{E}(XY)$.*

Solution. *La variable aléatoire Y prend ses valeurs dans $[1/2, 1]$ et pour tout $t \in [1/2, 1]$,*

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(U \leq t, 1-U \leq t) = \mathbb{P}(U \leq t, U \geq 1-t) = t - (1-t) = 2t - 1$$

donc Y suit la loi uniforme sur $[1/2, 1]$. On remarque que $X = 1 - Y$ et on en déduit que X suit la loi uniforme sur $[0, 1/2]$. Pour calculer $\mathbb{E}[XY]$, on remarque que $XY = U(1-U)$ et donc

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[U(1-U)] = \int_0^1 (t - t^2)\, dt = [t^2/2 - t^3/3]_0^1 = 1/2 - 1/3 = 1/6.$$

Exercice 8 (Lois de Cauchy)**.** *Soit X une variable aléatoire de Cauchy, de densité $(\pi(1+x^2))^{-1}$.*

1. *Calculer et reconnaître la loi de $1/X$;*
2. *Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la variable aléatoire $|X|^\alpha$ est-elle intégrable ?*

Solution. *Si X suit la loi de Cauchy, alors*

$$F_X(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^t \frac{1}{1+u^2}\, du = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(t), \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

1. *Déterminons la fonction de répartition de $1/X$.*
   Pour $t > 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\frac{1}{X} \leq t\right) &= \mathbb{P}\left(X \leq 0 \cup (X \geq 0, X \geq 1/t)\right) = \mathbb{P}\left(X \leq 0\right) + 1 - \mathbb{P}(X \leq 1/t) \\ &= \frac{1}{2} + 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{1}{t}\right)\right) = 1 - \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{1}{t}\right)\end{aligned}$$

   Comme la fonction arctan *vérifie l'équation*

$$\arctan(t) + \arctan(1/t) = \frac{\pi}{2}, \qquad \forall t \geq 0,$$

   on en déduit que

$$F_{1/X}(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(t), \qquad \forall t > 0.$$

   On voit de même que, pour $t < 0$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{X} \leq t\right) = \mathbb{P}(0 \geq X \geq 1/t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{1}{t}\right).$$

Comme arctan *est impaire, elle vérifie aussi*

$$\arctan(t) + \arctan(1/t) = -\frac{\pi}{2}, \qquad \forall t \leq 0,$$

et on en déduit que

$$F_{1/X}(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(t), \qquad \forall t < 0.$$

En conclusion, $F_{1/X} = F_X$ et donc $1/X$ a la même loi que X c'est-à-dire une loi de Cauchy. Remarque : on verra en PC 3 comment identifier la loi de $1/X$ avec la méthode de la fonction muette.

2. *Comme $\mathbb{E}(|X|^\alpha) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^2}\,dx$ il vient $\mathbb{E}(|X|^\alpha) < \infty$ si et seulement si $\alpha < 1$. En particulier X n'a pas d'espérance.*

Exercice 9 (Simulation par la méthode d'inversion)**.** *Comment créer des réalisations d'une loi de probabilité donnée à l'aide d'un ordinateur ? Il existe de nombreuses méthodes différentes en fonction de la loi que l'on souhaite simuler. L'ingrédient de base de toutes ces méthodes est un générateur de (pseudo-)variables aléatoires indépendantes de la loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$. En effet, tout bon langage de programmation est équipé d'un tel générateur. Certaines méthodes de simulation consistent à tirer une réalisation de la loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$ et à appliquer une transformation telle que le résultat suit la loi souhaitée. D'autres méthodes plus complexes nécessitent plusieurs réalisations de la loi uniforme, qui sont combinées de sorte qu'on obtienne une réalisation de la loi souhaitée.*

Pour la méthode de simulation dite d'inversion on considère une fonction de répartition F sur $\mathbb{R}$ et on introduit son inverse généralisée définie par

$$p \in [0,1] \mapsto F^{\leftarrow}(p) = \inf\{x;\ F(x) \geq p\} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

1. *Montrer que $F^{\leftarrow}(p) \leq x$ si et seulement si $p \leq F(x)$.*
2. *En déduire que si U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$, la variable aléatoire $X := F^{\leftarrow}(U)$ a pour fonction de répartition F.*
3. *Déduire de la question précédente une méthode générale de simulation de variables aléatoires réelles et l'appliquer au cas d'une variable exponentielle.*
4. *Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles dont la fonction de répartition F_X est continue sur $\mathbb{R}$. Qu'elle est la loi de $F_X(X)$?*

Solution. *Dans cet exercice, on prolonge F en posant $F(+\infty) = 1$ et $F(-\infty) = 0$.*

1. *Une fonction de répartition étant croissante, on en déduit que si $p \in [0,1]$, $I(p) := \{x \in \overline{\mathbb{R}} : F(x) \geq p\}$ est un intervalle non vide de la forme $[a, +\infty]$ ou $]a, +\infty]$, avec $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrons que $I(p) = [a, +\infty]$. Si $a = +\infty$, c'est évident. Supposons donc $a < +\infty$. Le fonction F est continue à droite, donc si a_n est une suite strictement décroissante convergeant vers a (il existe toujours une telle suite, même si $a = -\infty$), on a $F(a_n) \downarrow F(a)$. Or, pour tout n, $a_n > a$ donc $a_n \in I$ et donc $F(a_n) \geq p$. En passant à la limite, on trouve donc $F(a) \geq p$ ce qui prouve que $a \in I(p)$. Comme $a = \inf I(p) = F^{\leftarrow}(p)$, on a montré que $F(x) \geq p$ si et seulement si $x \geq a = F^{\leftarrow}(p)$.*
2. *Pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(F^{\leftarrow}(U) \leq t) = \mathbb{P}(U \leq F(t)) = F(t).$$

On a donc bien $F_X = F$.

3. *Si $F^{\leftarrow}$ possède une expression explicite, il suffit de poser $X = F^{\leftarrow}(U)$ où U est une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$ (on utilise pour cela le générateur de nombres aléatoires du logiciel). Dans le cas où $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$, avec $\lambda > 0$, on trouve $F^{\leftarrow}(p) = -\frac{1}{\lambda}\log(1-p)$. Comme U et $1-U$ ont même loi uniforme sur $[0,1]$, on déduit de la question précédente que la variable $-\frac{1}{\lambda}\log(U)$ suit une loi exponentielle de paramètre λ.*
4. *Montrons que pour tout $p \in [0,1]$, $F \circ F^{\leftarrow}(p) = p$.*
   On a déjà montré plus haut que $F \circ F^{\leftarrow}(p) \geq p$ pour tout $p \in [0,1]$. Montrons l'inégalité dans l'autre sens. Soit $p \in]0,1[$; pour tout $n \geq 1$, $F^{\leftarrow}(p) - 1/n < F^{\leftarrow}(p)$ et donc par définition de $F^{\leftarrow}(p)$, on a $F(F^{\leftarrow}(p) - 1/n) < p$. Comme F est supposée continue sur $\mathbb{R}$, on voit en passant à la limite quand $n \to +\infty$ que $F(F^{\leftarrow}(p)) \leq p$. Le même raisonnement marche également si $p = 1$ et $F^{\leftarrow}(p) < +\infty$. Enfin, si $p = 0$ ou si $p = 1$ et $F^{\leftarrow}(1) = \pm\infty$, l'égalité découle de la convention $F(+\infty) = 1$, $F(-\infty) = 0$ adoptée ici.
   On peut maintenant donner la loi de $Y = F_X(X)$. D'après la question 2., on peut supposer sans perte de généralité que $X = F_X^{\leftarrow}(U)$ avec U une variable uniforme sur $[0,1]$. On a alors
   $$\mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(F_X(F_X^{\leftarrow}(U)) \leq t) = \mathbb{P}(U \leq t), \qquad \forall t \in \mathbb{R},$$
   et donc Y suit une loi uniforme sur $[0,1]$.

Exercice 10 (Calculs de moments)**.**

1. *Montrer que si X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ alors $\mathbb{E}(X^n) = \frac{n!}{\lambda^n}$;*
2. *Montrer que si X suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$ alors $\mathbb{E}(X^{2n}) = \prod_{k=1}^{n}(2k-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$.*

Solution. 1. *Par intégration par parties :*

$$\mathbb{E}\left(X^n\right) = \int_0^{+\infty} x^n \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{n}{\lambda}\mathbb{E}\left(X^{n-1}\right).$$

On en déduit le résultat par récurence immédiate.

2. *Par intégration par parties :*

$$\mathbb{E}\left(X^{2n}\right) = \int_{\mathbb{R}} x^{2n} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{x^{2n+2}}{2n+1} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx = \frac{1}{2n+1}\mathbb{E}\left(X^{2(n+1)}\right).$$

On en déduit le résultat par récurence immédiate.

Exercice 11 (Caractérisation par les moments)**.** *Montrer que si deux variables aléatoires* bornées *X et Y ont les mêmes moments, c'est-à-dire que $\mathbb{E}(X^n) = \mathbb{E}(Y^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors X et Y ont même loi.*

Solution. *Comme $\mathbb{E}(X^n) = \mathbb{E}(Y^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on conclut par linéarité que $\mathbb{E}(P(X)) = \mathbb{E}(P(Y))$ pour tout polynôme P. Les variables X et Y étant bornées, on peut trouver K un segment de $\mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(X \in K) = \mathbb{P}(Y \in K) = 1$. Pour toute fonction continue bornée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme P tel que $\sup_{x\in K}|P(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ (d'après le théorème de Weierstrass appliqué à la restriction de f à K), et donc*

$$|\mathbb{E}(f(X)) - \mathbb{E}(f(Y))| \leq |\mathbb{E}(f(X) - P(X))| + |\mathbb{E}(f(Y) - P(Y))| + |\mathbb{E}(P(X)) - \mathbb{E}(P(Y))| \leq 2\varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on conclut que $\mathbb{E}(f(X)) = \mathbb{E}(f(Y))$ pour toute fonction continue bornée f. Donc X et Y ont la même loi.

Exercice 12 (Contre exemple de Heyde pour la loi log-normale)**.** *Soit* f_0 *la densité de* $X_0 := e^Z$ *où* Z *suit la loi* $\mathcal{N}(0,1)$*, c'est à dire* $f_0(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\log(x)^2/2}$ *pour* $x > 0$*. Pour tout réel* $-1 < a < 1$ *fixé, on définit la fonction* $f_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ *par* $f_a(x) := f_0(x)(1 + a\sin(2\pi\log(x)))$*. Montrer que* f_a *est une densité possédant les mêmes moments que* f_0*, et en déduire que la loi log-normale n'est pas caractérisée par ses moments.*

Solution. *Soit* $a \in [-1,1]$*,* $f_a \geq 0$ *et, avec le changement de variable* $u(x) = \log(x)$*, on a*

$$\int_0^{+\infty} f_a(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} (1 + a\sin(2\pi u))\, du = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} du + a \int_{\mathbb{R}} \sin(2\pi u) \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} du = 1,$$

(puisque sin *est impaire). Calculons maintenant* $\mathbb{E}(X_a^n)$ *où* X_a *est une v.a.r. de densité* f_a*. Nous avons, en effectuant le changement de variable* $u(x) = \log(x)$*, et en remarquant que* $\sin(2\pi(u+n)) = \sin(2\pi u)$*,*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_a^n) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{nu}e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} (1 + a\sin(2\pi u))\, du = \mathbb{E}(X_0^n) + a\int_{\mathbb{R}} \sin(2\pi u) \frac{e^{nu}e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} du \\
&= \mathbb{E}(X_0^n) + a\int_{\mathbb{R}} \sin(2\pi u) \frac{e^{-\frac{(u-n)^2}{2} + \frac{n^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} du = \mathbb{E}(X_0^n) + ae^{\frac{n^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} \sin(2\pi(u+n)) \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} du \\
&= \mathbb{E}(X_0^n).
\end{aligned}$$

La loi log-normale n'est pas caractérisée par ses moments. On peut également calculer $\mathbb{E}(X_0^n) = e^{\frac{n^2}{2}}$.