PC 4 : Vecteurs aléatoires à densités - lois conditionnelles

Exercice 1. *Soit R une variable exponentielle de paramètre $1/2$ et Θ une variable uniforme sur $[0, 2\pi]$ indépendantes.*

1. *Quelle est la loi de $(X, Y) = (\sqrt{R}\cos(\Theta), \sqrt{R}\sin(\Theta))$? Comment simuler un couple de variables gaussiennes centrées réduites indépendantes à partir de deux variables uniformes sur $[0, 1]$ indépendantes U_1 et U_2 ?*
2. *Quelle est la loi de $a\frac{W}{Z}$ où $a > 0$ et Z et W sont deux gaussiennes centrées réduites indépendantes ? Et celle de l'inverse d'une variable de Cauchy de paramètre a de densité $x \mapsto \frac{a}{\pi(x^2+a^2)}$?*

Solution. 1. *Soit f continue bornée de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, par indépendance de Θ et R on a*

$$E\Big[f(\sqrt{R}\cos(\Theta), \sqrt{R}\sin(\Theta))\Big] = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(\sqrt{r}\cos(\theta), \sqrt{r}\sin(\theta))\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}r}\mathbf{1}_{r\in\mathbb{R}^+} \times \frac{1}{2\pi}\mathbf{1}_{\theta\in[0,2\pi]}drd\theta$$
$$= \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} f(\sqrt{r}\cos(\theta), \sqrt{r}\sin(\theta))\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}r} \times \frac{1}{2\pi}drd\theta.$$

changement de variable $x = \sqrt{r}\cos(\theta)$ et $y = \sqrt{r}\sin(\theta)$ donc $r = x^2 + y^2$ et $\theta = arctan(\frac{y}{x})$ le jacobien est donc $|J| = 2$. On obtient

$$E\Big[f(\sqrt{R}\cos(\Theta), \sqrt{R}\sin(\Theta))\Big] = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x, y)2 \times \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \times \frac{1}{2\pi}dxdy$$
$$= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x, y)e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \times \frac{1}{2\pi}dxdy.$$

Par la méthode de la fonction muette, (X, Y) suit une loi normale 2-dim. Simulation : on simule la loi exponentielle à partir de l'uniforme (cf PC2 par exemple car on connait facilement $F^{\leftarrow}$ ici).

2. *f continue bornée*

$$\mathbb{E}[f(a\frac{W}{Z})] = \int_{\mathbb{R}^2} f(a\frac{w}{z})\frac{e^{-\frac{z^2+w^2}{2}}}{2\pi}dzdw$$

changement de variable $u = a\frac{w}{z}$ et $v = z$. Donc $w = \frac{uv}{a}$, $z = v$ et le Jacobien est $|\frac{v}{a}|$. Ainsi

$$\mathbb{E}[f(a\frac{W}{Z})] = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{|v|}{2a\pi}f(u)e^{-\frac{1}{2}(v^2+\frac{u^2v^2}{a^2})}dvdu$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2a\pi}f(u)\Big(\int_{\mathbb{R}} |v|e^{-\frac{v^2}{2a^2}(a^2+u^2)}dv\Big)du$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2a\pi}f(u)\Big(2\int_0^{+\infty} ve^{-\frac{v^2}{2a^2}(a^2+u^2)}dv\Big)du$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{2a\pi}f(u)\Big[\frac{a^2e^{-\frac{v^2}{2a^2}(a^2+u^2)}}{a^2+u^2}\Big]_{\mathbb{R}^+}du$$
$$= \int_{\mathbb{R}} f(u)\frac{a}{\pi(a^2+u^2)}du$$

donc $a\frac{W}{Z}$ suit une loi de Cauchy.

Soit C une v.a. de loi de Cauchy.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\frac{1}{C}] &= \int_{\mathbb{R}} f(\frac{1}{x})\frac{a}{\pi(a^2+x^2)}dx \\ &= \int_0^{+\infty} f(\frac{1}{x})\frac{a}{\pi(a^2+x^2)}dx + \int_{-\infty}^0 f(\frac{1}{x})\frac{a}{\pi(a^2+x^2)}dx.\end{aligned}$$

Changement de variable $u = \frac{1}{x}$ on a

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f(\frac{1}{x})\frac{a}{\pi(a^2+x^2)}dx &= \int_0^{+\infty} f(u)\frac{1}{u^2}\frac{a}{\pi(a^2+\frac{1}{u^2})}du \\ &= \int_0^{+\infty} f(u)\frac{a}{\pi(u^2a^2+1)}du \\ &= \int_0^{+\infty} f(u)\frac{1/a}{\pi((\frac{1}{a})^2+u^2)}du\end{aligned}$$

de même en posant $u = \frac{1}{x}$

$$\int_{-\infty}^0 f(\frac{1}{x})\frac{a}{\pi(a^2+x^2)}dx = \int_{-\infty}^0 f(u)\frac{1/a}{\pi((\frac{1}{a})^2+u^2)}du.$$

Ainsi

$$\mathbb{E}[\frac{1}{C}] = \int_{\mathbb{R}} f(u)\frac{1/a}{\pi((\frac{1}{a})^2+u^2)}du$$

donc $1/C$ suit une loi de Cauchy de paramêtre $1/a$.

Exercice 2. *Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes gaussiennes centrées réduites.*

1. *Déterminer la loi de $\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}, \frac{X-Y}{\sqrt{2}}\right)$.*
2. *Déterminer la loi de X/Y.*

Solution. *Comme X et Y sont indépendantes, la loi de (X,Y) a une densité $\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ sur $\mathbb{R}^2$. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. On applique la méthode de la fonction muette en calculant $\mathbb{E}g\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}, \frac{X-Y}{\sqrt{2}}\right)$:*

$$\mathbb{E}\left[g\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}, \frac{X-Y}{\sqrt{2}}\right)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} g\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy.$$

Or $(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mapsto (\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{x-y}{\sqrt{2}}) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ est un C^1-difféormorphisme de jacobien 1. Le changement de variable $u = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$ et $v = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$ donne $x = \frac{u+v}{\sqrt{2}}$ et $y = \frac{u-v}{\sqrt{2}}$, de sorte que :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[g\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}, \frac{X-Y}{\sqrt{2}}\right)\right] &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} g(u,v)\,e^{-\frac{(u+v)^2+(u-v)^2}{4}}\,du\,dv \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} g(u,v)\,e^{-\frac{u^2+v^2}{2}}\,du\,dv.\end{aligned}$$

On en déduit que $(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}, \frac{X-Y}{\sqrt{2}})$ est à densité, de densité donnée par $(u,v) \mapsto \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{u^2+v^2}{2}}$. Ainsi, $(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}, \frac{X-Y}{\sqrt{2}})$ a la même loi qu'un couple de deux variables aléatoires gaussiennes centrées *réduites indépendantes.*

Comme X et Y sont indépendantes, la loi de (X,Y) a une densité $\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ sur $\mathbb{R}^2$. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. On applique la méthode de la fonction muette en calculant $\mathbb{E}[g(X/Y)]$:

$$\mathbb{E}\left(g\left(\frac{X}{Y}\right)\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} g\left(\frac{x}{y}\right) e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\, dx\, dy.$$

Or $(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^* \mapsto (x/y, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ est un C^1-difféormorphisme de jacobien y^{-1}. En faisant le changement de variable $u = x/y$ et $v = y$, de sorte que $x = uv$ et $y = v$, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} g\left(\frac{x}{y}\right) e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\, dx\, dy &= \int_{\mathbb{R}^2} g\left(\frac{x}{y}\right) |y|\, e^{-\frac{y^2}{2}(\frac{x^2}{y^2}+1)} |y|^{-1}\, dx\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} g(u)\, |v|\, e^{-\frac{v^2}{2}(u^2+1)}\, du\, dv \\
&= \int_{\mathbb{R}} g(u) \left(\int_{\mathbb{R}} |v|\, e^{-\frac{v^2}{2}(u^2+1)}\, dv\right) du \\
&= 2\int_{\mathbb{R}} g(u) \frac{1}{u^2+1}\, du.
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E}\left(g\left(\frac{X}{Y}\right)\right) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} g(u)\frac{1}{u^2+1}\, du,$$

ce qui signifie que la loi de X/Y est la loi de Cauchy, c'est-à-dire la loi de densité $(\pi(1+x^2))^{-1}$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

Exercice 3. *(Pale 2013) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\Gamma(\alpha,\lambda)$ et $\Gamma(\alpha+1/2,\lambda)$, avec $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$. On pose $(V,W) = (\sqrt{XY}, \sqrt{Y})$. Déterminer la loi de (V,W).*

On rappelle que la densité de la loi $\Gamma(a,\lambda)$ est (c.f. Section 4.6.3 du poly)

$$\frac{1}{\Gamma(a)}\lambda^a x^{a-1} e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{x>0}, \qquad \text{avec} \quad \Gamma(a) = \int_0^\infty z^{a-1}e^{-z}dz.$$

Solution. *Comme X et Y sont indépendantes, la loi de (X,Y) a pour densité $(x,y) \mapsto f_X(x)f_Y(y)$, où f_X et f_Y désignent les densités de X et Y. On utilise alors la méthode de la fonction muette :*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[h(V,W)] &= \mathbb{E}\left[h(\sqrt{XY}, \sqrt{Y})\right] \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} h(\sqrt{xy}, \sqrt{y}) f_{(X,Y)}(x,y)dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} h(\sqrt{xy}, \sqrt{y}) f_X(x) f_Y(y)dxdy \\
&= \frac{\lambda^{2\alpha+1/2}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1/2)}\int_{]0,\infty[^2} h(\sqrt{xy}, \sqrt{y})(xy)^{\alpha-1/2}e^{-\lambda(x+y)}\frac{dxdy}{\sqrt{x}}.
\end{aligned}$$

On considère le changement de variable $v = \sqrt{xy}, w = \sqrt{y}$ qui est un C^1 difféomorphisme de $]0,\infty[^2$ dans lui-même. Le calcul du déterminant de la matrice jacobienne donne

$$dvdw = \frac{dxdy}{4\sqrt{x}}.$$

Ainsi, avec $y = w^2$ *et* $x = v^2/w^2$*,*

$$\mathbb{E}\left[h(V,W)\right] = \frac{4\lambda^{2\alpha+1/2}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1/2)} \int_{]0,\infty[^2} h(v,w) v^{2\alpha-1} e^{-\lambda(w^2+\frac{v^2}{w^2})} dvdw.$$

Ainsi, (V,W) *est à densité et sa densité est donnée par*

$$f_{(V,W)}(v,w) = \frac{4\lambda^{2\alpha+1/2}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1/2)} v^{2\alpha-1} e^{-\lambda(w^2+\frac{v^2}{w^2})} \mathbf{1}_{v>0,w>0}.$$

Exercice 4. *Soit* (X,Y) *un couple de variables aléatoires réelles à densité sur* $\mathbb{R}^2$ *tel que :*

(i) X *suit une loi* $\Gamma(2,\lambda)$ *(de densité* $f_X(x) = \lambda^2 x \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\{x \geq 0\}}$*),*

(ii) la loi conditionnelle de Y *sachant* X *est la loi uniforme sur le segment* $[0,X]$ *(ou, en d'autres termes, la densité conditionnelle de* Y *sachant que* $X = x$ *est* $f_{Y|X=x}(y) = \frac{1}{x}\mathbf{1}_{\{0<y<x\}}$*).*

1. *Déterminer la densité de* (X,Y) *ainsi que la loi de* Y*.*
2. *Calculer la densité conditionnelle de* X *sachant* Y*.*
3. *Calculer les quantités suivantes :*
   (a) $\mathbb{E}\left[XY\right]$ *(on pourra utiliser le fait que* $\mathbb{E}\left[X^2\right] = \frac{6}{\lambda^2}$*),*
   (b) $\mathbb{E}\left[Y|X\right]$*,*
   (c) $\mathbb{E}\left[X|Y\right]$*,*
   (d) $\mathbb{E}\left[X + XY|Y\right]$*,*
   (e) $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[Y|X\right]\right]$.

Solution.

1. $f_{(X,Y)}(x,y) = f_{Y|X=x}(y) \times f_X(x) = \lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\{0<y<x\}}$. *On obtient*

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\{0<y<x\}} dx = \lambda \mathbf{1}_{y>0} e^{-\lambda y}$$

   Y *suit une loi exponentielle de paramètre* λ*.*

2. *Soit* $y > 0$*, on a*

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\{0<y<x\}} \times \frac{1}{\lambda} e^{\lambda y} = \lambda e^{-\lambda(x-y)} \mathbf{1}_{\{0<y<x\}}.$$

3. *a.*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[XY] &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} xy\lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\{0<y<x\}} dydx \\
&= \int_0^{+\infty} \lambda^2 x e^{-\lambda x} \frac{x^2}{2} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} x^3 \lambda^2 e^{-\lambda x} dx \\
&= \frac{1}{2} \mathbb{E}[X^2] \\
&= \frac{3}{\lambda^2}.
\end{aligned}$$

b. *On calcul pour $x > 0$*

$$\int_{\mathbb{R}} y f_{Y|X=x}(y)dy = \int_0^{+\infty} y\frac{1}{x}\mathbf{1}_{\{0<y<x\}}dy = \frac{1}{x}\int_0^x ydy = \frac{x}{2}$$

donc $\mathbb{E}[Y|X] = \frac{X}{2}$.

Remarque : $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[XY|X]] = \mathbb{E}[Y\mathbb{E}[Y|X]] = \mathbb{E}[\frac{X^2}{2}] = \frac{3}{\lambda^2}$.

c. *Soit $y > 0$ on calcul*

$$\int_{\mathbb{R}} x\lambda e^{-\lambda(x-y)}\mathbf{1}_{\{0<y<x\}}dx = e^{\lambda y}\int_y^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx = e^{\lambda y}\big([-xe^{-\lambda x}]_y^{+\infty} + \int_y^{+\infty} e^{-\lambda x}\big) = y + \frac{1}{\lambda}.$$

Donc $\mathbb{E}[X|Y] = Y + \frac{1}{\lambda}$.

d. $\mathbb{E}\left[X + XY|Y\right] = \mathbb{E}[X|Y](1+Y)$

e. $\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]] = \mathbb{E}[\frac{X}{2}] = \frac{1}{\lambda}$. *Remarque :* $\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]] = \mathbb{E}[Y]$.

Exercice 5. *Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles à densité sur $\mathbb{R}^2$. On suppose que X et Y sont indépendantes.*

(1) Montrer que

$$\mathbb{E}\left[X|Y\right] = \mathbb{E}\left[X\right].$$

(2) Plus généralement, montrer que $\mathbb{E}\left[h(X,Y)|X\right] = \Phi(X)$, avec

$$\Phi(x) = \mathbb{E}\left[h(x,Y)\right].$$

Solution. *(1) Par définition, $\mathbb{E}\left[X|Y\right] = \Psi(Y)$, avec*

$$\Psi(y) = \int_{\mathbb{R}} x\frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)}dx.$$

Or X et Y sont indépendantes, donc $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$. On en déduit que

$$\Psi(y) = \int_{\mathbb{R}} xf_X(x)dx = \mathbb{E}\left[X\right].$$

Donc $\mathbb{E}\left[X|Y\right]$ est une variable aléatoire constante qui vaut $\mathbb{E}\left[X\right]$.

(2) Par définition, $\mathbb{E}\left[h(X,Y)|X\right] = \Phi(X)$ avec

$$\Phi(x) = \int_{\mathbb{R}} h(x,y)\frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_X(x)}dy = \int_{\mathbb{R}} h(x,y)f_Y(y)dy = \mathbb{E}\left[h(x,Y)\right].$$

Exercice 6 (Lois uniformes)**.**

1. *Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles. Montrer que (X,Y) suit la loi uniforme sur le carré $[0,1]^2$ si et seulement si X et Y sont indépendantes et de loi uniforme sur $[0,1]$;*
2. *On coupe un bâton au hasard en trois morceaux en utilisant deux v.a. indépendantes et uniformes sur $[0,1]$ pour déterminer les points de coupe. Vérifier que les longueurs des trois morceaux ainsi obtenus sont des v.a. de même loi. Sont-elles indépendantes ? Quelle est la probabilité de pouvoir fabriquer un triangle avec ces trois morceaux ?*
3. *Deux amis se donnent rendez vous entre 12h et 13h, et arrivent indépendamment uniformément entre ces deux horaires. Calculer le temps moyen d'attente du premier arrivé.*

Solution. *1. Le couple (X,Y) est uniformément distribué sur le carré $[0,1]^2$ si et seulement s'il admet pour densité $f_{(X,Y)} = \mathbf{1}_{[0,1]^2}$. On remarque que*

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \mathbf{1}_{[0,1]^2}(x,y) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x) \times \mathbf{1}_{[0,1]}(y)$$

Donc (X,Y) est uniformément réparti sur $[0,1]^2$ si et seulement si X et Y sont indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$.

2. $[0,1] = [0,U] \cup [U,V] \cup [V,1]$, $(U,V) := (\min(X,Y), \max(X,Y))$. *Pour tout $t \in [0,1]$ (dessin)*

$$\mathbb{P}(\min(X,Y) \le t) = \iint_{[0,1]^2} \mathbf{1}_{\{\min(x,y)\le t\}}\, dxdy = 1-(1-t)^2$$

(on peut alternativement utiliser l'indépendance de X et Y) et

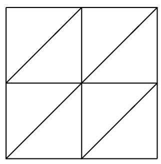
$$\mathbb{P}(1-\max(X,Y) \le t) = \iint_{[0,1]^2} \mathbf{1}_{\max(x,y)\ge 1-t}\, dxdy = 1-(1-t)^2$$

et comme $\max(x,y) - \min(x,y) = |x-y|$,

$$\mathbb{P}(\max(X,Y) - \min(X,Y) \le t) = \iint_{[0,1]^2} \mathbf{1}_{|x-y|\le t}\, dxdy = 1-(1-t)^2.$$

Ces trois longueurs $a := \min(X,Y)$, $b := \max(X,Y) - \min(X,Y)$, et $c := 1 - \max(X,Y)$ sont de même loi, mais ne sont pas indépendantes (leur somme fait 1). De manière générale, un dessin montre qu'on peut former un triangle avec trois bâtons de longueurs $(\min =)\ell_1 \le \ell_2 \le \ell_3 (= \max)$ *lorsque $\ell_3 - \ell_1 \le \ell_2$. Si nous savons que $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 = 1$ alors la condition devient $\ell_3 \le \frac{1}{2}$. On a ici $\ell_3 = \max(a,b,c)$. Pour tout $t \in [0,1]$, on a*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\max(a,b,c) \le t) &= \mathbb{P}(a \le t, b \le t, c \le t)\\ &= \mathbb{P}(\min(X,Y) \le t, |X-Y| \le t, \max(X,Y) \ge 1-t)\\ &= \iint_{[0,1]^2} \mathbf{1}_{\min(x,y)\le t, |x-y|\le t, \max(x,y)\ge 1-t}\, dxdy.\end{aligned}$$



Pour $t = \frac{1}{2}$ on trouve $\frac{1}{4}$ (dessin, papillon). On peut donc former un triangle dans 25% des cas !

3. On a $\mathbb{E}(\max(X,Y) - \min(X,Y)) = \int_0^1 t(1-(1-t)^2)'\, dt = \frac{1}{3}$ *(d'heure, soit vingt minutes). Astuce pour aller plus vite, comme $1 = a+b+c$ et que a,b,c ont même loi il vient* $\mathbb{E}(a) = \mathbb{E}(b) = \mathbb{E}(c) = 1/3$.

Exercice 7. *Une personne décide de vendre sa maison au premier acheteur qui fera une offre supérieure ou égale à s euros. On suppose que les offres $(X_1, X_2, \dots)$ sont indépendantes et suivent la même loi qu'une variable aléatoire X.*

(1) Soit $N \ge 1$ le nombre d'offres nécessaires pour vendre la maison. Quelle est la loi de N ?

(2) Déterminer la loi du prix de vente X_N de la maison, et montrer que le prix de vente est indépendant de N.

Solution. *(1) On fixe $k \geq 1$ et on calcule $\mathbb{P}(N = k)$. Pour cela, on remarque que $N = \min\{i \geq 1 : X_i \geq s\}$. Ainsi, les deux événements $\{N = k\}$ et $\{X_1 < s, X_2 < s, \ldots, X_{k-1} < s, X_k \geq s\}$ sont égaux. Donc, par indépendance :*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N = k) &= \mathbb{P}(X_1 < s, X_2 < s, \ldots, X_{k-1} < s, X_k \geq s) \\
&= \mathbb{P}(X_1 < s) \cdot \mathbb{P}(X_2 < s) \cdots \mathbb{P}(X_{k-1} < s) \cdot \mathbb{P}(X_k \geq s) \\
&= \mathbb{P}(X < s)^{k-1} \, \mathbb{P}(X \geq s) \\
&= (1 - \mathbb{P}(X \geq s))^{k-1} \mathbb{P}(X \geq s) .
\end{aligned}$$

La variable aléatoire N suit donc une loi géométrique de paramètre $\mathbb{P}(X \geq s)$.

(2) Déterminons la loi de X_N en calculant $\mathbb{P}(X_N \geq u)$ pour tout $u \geq 0$. Comme $X_N \geq s$, il est clair que $\mathbb{P}(X_N \geq u) = 1$ si $u \leq s$. Maintenant, si $u > s$, en utilisant la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_N \geq u) &= \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X_N \geq u, N = k) \\
&= \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X_k \geq u, N = k) \\
&= \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X_k \geq u, X_1 < s, \ldots, X_{k-1} < s) \\
&= \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X \geq u) \, \mathbb{P}(X \leq s)^{k-1} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X \geq u)}{\mathbb{P}(X \geq s)}.
\end{aligned}$$

On remarque que $\mathbb{P}(X_N \geq u) = \mathbb{P}(X \geq u | X \geq s)$: ainsi, X_N suit la loi conditionnelle de X sachant que $X \geq s$.

Pour montrer que N et X_N sont indépendants, il suffit de montrer que

$$\mathbb{P}(N = k, X_N \geq u) = \mathbb{P}(N = k) \, \mathbb{P}(X_N \geq u)$$

pour tous $k \geq 1$ et $u \in \mathbb{R}$. Comme c'est clair pour $u \leq s$ (les deux termes valent $\mathbb{P}(N = k)$), on peut supposer que $u > s$. Alors, d'après les calculs précédents

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N = k, X_N \geq u) &= \mathbb{P}(X \geq u) \, \mathbb{P}(X \leq s)^{k-1} \\
&= \left(\frac{\mathbb{P}(X \geq u)}{\mathbb{P}(X \geq s)} \right) \cdot \Big((1 - \mathbb{P}(X \geq s))^{k-1} \mathbb{P}(X \geq s) \Big) \\
&= \mathbb{P}(X_N \geq u) \cdot \mathbb{P}(N = k) .
\end{aligned}$$

Ainsi, X_N et N sont indépendants.

Exercice 8.

1) - On considère une fonction $\tilde{g}$, positive, et intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que l'algorithme

- *Tirer X suivant la densité $a\tilde{g}$, où a est une constante de renormalisation*
- *Tirer U suivant une loi uniforme sur $[0, \tilde{g}(X)]$*

permet de tirer (X, U) suivant une loi uniforme sur l'ensemble

$$\mathcal{A} = \big\{ (x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \text{ t.q. } 0 \leq u \leq \tilde{g}(x) \big\} .$$

2) - Réciproquement, si (X, U) suit une loi uniforme sur $\mathcal{A}$ quelle est la loi de X ?

3) - On considère maintenant deux densités f et g telles que $f(x) \leq cg(x)$ pour tout x. Montrer que l'algorithme "Tirer uniformément (X,U) sur $\mathcal{A}$ (avec $\tilde{g} = cg$) jusqu'à ce que la marginale U soit intérieure à $f(X)$" donne un vecteur (X,U) de loi uniforme sur

$$\mathcal{B} = \left\{(x,u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+,\ \text{t.q. } 0 \leq u \leq f(x)\right\}.$$

En déduire une interprétation graphique de l'algorithme du rejet.

Exercice 9. : Simulation selon la loi Gamma
On rappelle que pour $a, \lambda > 0$, la densité de la loi Gamma $\Gamma(a,\lambda)$ est donnée par

$$f_{\Gamma(a,\lambda)}(z) = \frac{\lambda^a z^{a-1}}{\Gamma(a)} e^{-\lambda z} \mathbf{1}_{\{z>0\}}.$$

On suppose dans la suite que $a > 1$ et on note

$$g_a(z) = z^{a-1} e^{-z} \mathbf{1}_{\{z>0\}} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{D}_a = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 : x \leq \sqrt{g_a\left(\frac{y}{x}\right)}\right\}.$$

1. *Calculer $\sup_{z>0} g_a(z)$ et $\sup_{z>0} z^2 g_a(z)$. En déduire que $\mathcal{D}_a \subset [0, x_a] \times [0, y_a]$, où $x_a = \left(\frac{a-1}{e}\right)^{\frac{a-1}{2}}$ et $y_a = \left(\frac{a+1}{e}\right)^{\frac{a+1}{2}}$.*
2. *Soit $(X,Y) \sim \mathcal{U}(\mathcal{D}_a)$ un couple uniformément distribué sur $\mathcal{D}_a$, i.e. (X,Y) possède la densité $\frac{1}{|\mathcal{D}_a|} 1_{\{0 \leq y\}} 1_{\{0 \leq x \leq \sqrt{g_a(\frac{y}{x})}\}}$, où $|\mathcal{D}_a|$ désigne la surface de $\mathcal{D}_a$. Quelle est la loi de $W = \frac{Y}{X}$? En déduire que $|\mathcal{D}_a| = \frac{\Gamma(a)}{2}$. Conclure que $Z = \frac{W}{\lambda} \sim \Gamma(a,\lambda)$.*
3. *Comment simuler suivant les lois $\mathcal{U}(\mathcal{D}_a)$ et $\Gamma(a,\lambda)$?*
4. *On vient de voir que pour simuler suivant la loi $\Gamma(a,1)$, il n'y a pas besoin de connaître la constante $\Gamma(a)$ qui permet de normaliser g_a pour obtenir la densité $f_{\Gamma(a,1)}$. Est-ce que remplacer g_a par cg_a où $c > 0$ dans la méthode ci-dessus change son efficacité ?*

Solution. 1. *Pour $z > 0$, on a $g_a'(z) = z^{a-2} e^{-z}[a - 1 - z] \geq 0$ si et seulement si $a - 1 \geq z$. Puisque $a > 1$, on en déduit que*

$$\sup_{z>0} g_a(z) = g_a(a-1) = \left(\frac{a-1}{e}\right)^{a-1}.$$

De même, pour $z > 0$, $(z^2 g_a(z))' = z^a e^{-z}[a + 1 - z] \geq 0$ si et seulement si $a + 1 \geq z$. On en déduit que

$$\sup_{z>0} z^2 g_a(z) = (a+1)^2 g_a(a+1) = \left(\frac{a+1}{e}\right)^{a+1}.$$

Pour $(x,y) \in \mathcal{D}_a$ on a, d'une part,

$$0 \leq x \leq \sqrt{g_a(y/x)} \leq \sqrt{\sup_{z>0} g_a(z)} = \left(\frac{a-1}{e}\right)^{\frac{a-1}{2}} = x_a,$$

et d'autre part, en multipliant $x^2 \leq g_a(y/x)$ par $\left(\frac{y}{x}\right)^2$, on obtient

$$y^2 \leq \left(\frac{y}{x}\right)^{a+1} e^{-x/y} \leq \sup_{z>0} z^2 g_a(z) = \left(\frac{a+1}{e}\right)^{a+1},$$

et donc $y \leq \left(\frac{a+1}{e}\right)^{\frac{a+1}{2}} = y_a$.

2. *Par la méthode de la fonction muette, pour toute fonction h continue, bornée on a*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[h(W)] = \mathbb{E}\left[h\left(\frac{y}{x}\right)\right] &= \int_{\mathbb{R}^2} h\left(\frac{y}{x}\right) f_{(X,Y)}(x,y)d(x,y)\\ &= \frac{1}{|\mathcal{D}_a|}\int_{\mathcal{D}_a} h\left(\frac{y}{x}\right) d(x,y).\end{aligned}$$

Par le changement de variable $s = x, t = y/x$ avec Jacobien $J = s$ on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[h(W)] &= \frac{1}{|\mathcal{D}_a|}\int_0^\infty h(t)\int_0^{\sqrt{g_a(t)}} sdsdt\\ &= \frac{1}{|\mathcal{D}_a|}\int_0^\infty h(t)\frac{g_a(t)}{2}dt.\end{aligned}$$

Donc, la densité f_W de W est donnée par

$$f_W(t) = \frac{1}{2|\mathcal{D}_a|}g_a(t)\mathbf{1}_{t>0} = \frac{1}{2|\mathcal{D}_a|}t^{a-1}e^{-t}\mathbf{1}_{t>0}.$$

Autrement dit, W suit la loi Gamma $\Gamma(a,1)$, dont la constante de normalisation est $1/\Gamma(a)$. On en déduit que $|\mathcal{D}_a| = \frac{\Gamma(a)}{2}$.
Enfin, pour la fonction de répartition F_Z de $Z = W/\lambda$ avec $\lambda > 0$ on trouve pour tout $z > 0$

$$F_Z(z) = \mathbb{P}\left(\frac{W}{\lambda} \leq z\right) = F_W(\lambda z).$$

On en déduit que la densité f_Z de Z est, pour $z > 0$,

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = (F_W(\lambda z))' = \lambda f_W(\lambda z) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}z^{a-1}e^{-z}.$$

Donc, $Z \sim \Gamma(a,\lambda)$.

3. *D'abord, pour simuler de la loi $U(\mathcal{D}_a)$, on utilise que $\mathcal{D}_a \subset [0,x_a]\times[0,y_a]$. On tire alors d'abord un candidat uniformément dans $[0,x_a]\times[0,y_a]$. Si le point tiré appartient à $\mathcal{D}_a$ on le garde comme réalisation de la loi $U(\mathcal{D}_a)$, sinon on tire un autre candidat jusqu'à générer un point appartenant à $\mathcal{D}_a$. En résumé :*

   Algorithme 1 :

   (a) *Tirer des candidats $A \sim U(0,x_a)$ et $B \sim U(0,y_a)$ où A et B sont indépendants.*

   (b) *Si $(A,B) \in \mathcal{D}_a$, alors (A,B) est une réalisation de la loi $U(\mathcal{D}_a)$. Sinon on recommence en (a).*

   Pour simuler selon la loi Gamma $\Gamma(a,\lambda)$ on utilise la question 2 :
   Algorithme 2 :

   (a) *Tirer une réalisation (X,Y) de la loi $U(\mathcal{D}_a)$ selon Algorithme 1.*

   (b) *Évaluer $W = \frac{Y}{\lambda X}$, ce qui est une réalisation de la loi Gamma $\Gamma(a,\lambda)$.*

4. *L'efficacité de cette méthode de simulation (Algorithme 2) ne dépend que de l'efficacité de l'Algorithme 1, qui dépend du nombre M d'itérations nécessaire pour obtenir une réalisation de la loi $U(\mathcal{D}_a)$. Celle-ci dépend de la probabilité d'accepter un candidat (A,B), à savoir de*

$$\mathbb{P}((A,B) \in \mathcal{D}_a) = \frac{|\mathcal{D}_a|}{|[0,x_a]\times[0,y_a]|} = \frac{\Gamma(a)}{2x_a y_a},$$

car (A,B) est un point tiré uniformément dans le rectangle $[0,x_a]\times[0,y_a]$, qui contient $\mathcal{D}_a$. Ensuite, le nombre d'itérations nécessaire M suit une loi géométrique de paramètre $\frac{\Gamma(a)}{2x_ay_a}$. Alors, le nombre moyen d'itérations vaut $\mathbb{E}[M]=\frac{2x_ay_a}{\Gamma(a)}$.
Maintenant, analysons l'efficacité de l'algorithme lorsqu'on remplace g_a par cg_a avec une constante $c>0$ dans la méthode de simulation. Or,

$$\begin{aligned}
(x,y)\in\mathcal{D}_a &\iff (x,y)\in\mathbb{R}_+^2 : x\le\sqrt{g_a\left(\frac{y}{x}\right)}\\
&\iff (x,y)\in\mathbb{R}_+^2 : \sqrt{c}x\le\sqrt{cg_a\left(\frac{\sqrt{c}y}{\sqrt{c}x}\right)}\\
&\iff (\sqrt{c}x,\sqrt{c}y)\in\mathcal{D}_a^c := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}_+^2 : x\le\sqrt{cg_a\left(\frac{y}{x}\right)}\right\}.
\end{aligned}$$

On en déduit que $|\mathcal{D}_a^c|=c|\mathcal{D}_a|=\frac{c\Gamma(a)}{2}$. Par ailleurs, $\mathcal{D}_a^c\subset[0,\sqrt{c}x_a]\times[0,\sqrt{c}y_a]$. Donc, la probabilité que $(A',B')\sim U([0,\sqrt{c}x_a]\times[0,\sqrt{c}y_a])$ appartient à $\mathcal{D}_a^c$ vaut

$$\mathbb{P}((A',B')\in\mathcal{D}_a^c)=\frac{|\mathcal{D}_a^c|}{|[0,\sqrt{c}x_a]\times[0,\sqrt{c}y_a]|}=\frac{\Gamma(a)}{2x_ay_a},$$

Donc, l'efficacité ne dépend pas de c.

Exercice 10. Borne de Letac pour la méthode du rejet
Soit p une densité de probabilité sur l'intervalle $[0,1]$ suivant laquelle on souhaite simuler en utilisant un algorithme de rejet construit à l'aide d'une suite $((U_i,X_i))_{i\ge1}$ de vecteurs aléatoires i.i.d. où les U_i sont uniformément réparties sur $[0,1]$. Plus précisément, on suppose qu'il existe un ensemble d'acceptation $\mathcal{A}$ tel que $\mathbb{P}((U_1,X_1)\in\mathcal{A})>0$ et que la loi conditionnelle de U_1 sachant $(U_1,X_1)\in\mathcal{A}$ possède la densité p. On note $N=\min\{i\ge1 : (U_i,X_i)\in\mathcal{A}\}$ et B un sous-ensemble borélien de $[0,1]$.

1. *Quelle est la loi de N ? Et celle de U_N ?*
2. *Montrer que pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(U_n\in B, N\ge n)=\mathbb{P}(U_n\in B)\mathbb{P}(N\ge n)$.*
3. *En déduire que $\mathbb{P}(U_N\in B)\le\mathbb{P}(U_1\in B)\mathbb{E}(N)$.*
4. *Conclure que $\mathbb{E}(N)\ge\sup\{\rho\ge0 : \int_0^1 1_{\{p(u)\ge\rho\}}du>0\}$.*