PC 7 – Convergence en loi & Théorème de la limite centrale

Exercice 1. On suppose $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} c$ pour des v.a. (X_n) à valeurs réelles et $c \in \mathbb{R}$. Soit $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $\phi(x) = \min(x, 1)$.

1. Soit $\epsilon > 0$. Quelle est la limite de $\mathbb{E}[\phi(|X_n - c|/\epsilon)]$ quand $n \to \infty$?
2. En déduire que $X_n \to c$ en probabilité quand $n \to \infty$.

Solution.

1. Pour $\epsilon > 0$ fixé, la fonction $x \mapsto \phi(|x - c|/\epsilon)$ est continue et bornée. Par la convergence en loi de X_n vers c, on a $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\phi(|X_n - c|/\epsilon)] = \mathbb{E}[\phi(|c - c|/\epsilon)] = 0$.
2. On a
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\phi\left(\frac{|X_n - c|}{\epsilon}\right)\right] &= \mathbb{E}\left[\phi\left(\frac{|X_n - c|}{\epsilon}\right)\mathbb{1}\{|X_n - c| \leq \epsilon\}\right] + \mathbb{E}\left[\mathbb{1}\{|X_n - c| > \epsilon\}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\phi\left(\frac{|X_n - c|}{\epsilon}\right)\mathbb{1}\{|X_n - c| \leq \epsilon\}\right] + \mathbb{P}\left(|X_n - c| > \epsilon\right).\end{aligned}$$
Dans la question 1, on a montré que le terme à gauche tend vers 0 pour tout $\epsilon > 0$ lorsque $n \to \infty$. Comme les deux termes à droite sont positifs, cela implique qu'ils tendent tous les deux vers 0 lorsque $n \to \infty$. La convergence de $\mathbb{P}(|X_n - c| > \epsilon)$ vers 0 quelque soit $\epsilon > 0$ implique la convergence en probabilité de X_n vers c.

Exercice 2. On suppose $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ pour des v.a. à valeurs réelles. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $f(X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} f(X)$.
[**Remarque :** On fait généralement référence à ce résultat sous le nom de *théorème de continuité*. Comme pour les convergences p.s. et en probabilité, il suffit en fait que f soit continue en tout point de D tel que $\mathbb{P}(X \in D) = 1$.]

Solution. Par la définition de la convergence en loi, $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ implique que pour toute fonction h continue, bornée, on a $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[h(X_n)] = \mathbb{E}[h(X)]$. Or, la composition $h \circ f$ est une fonction continue, bornée, ce qui implique que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[h \circ f(X_n)] = \mathbb{E}[h \circ f(X)]$. D'où le résultat.

Exercice 3. Soit X_n telle que $\mathbb{P}(X_n = 0) = p_n$ et $\mathbb{P}(X_n = n) = 1 - p_n$.

1. Donner une CNS sur (p_n) pour que, quelle que soit la fonction f continue à support compact, $\mathbb{E}[f(X_n)]$ converge dans $\mathbb{R}$ quand $n \to \infty$.
2. Donner une CNS sur (p_n) pour que X_n converge en loi et donner sa limite.

Solution.

1. On a $\mathbb{E}[f(X_n)] = p_n f(0) + (1 - p_n) f(n)$. Comme f est compact, on a $f(n) = 0$ pour tout n suffisamment grand. Donc, $\mathbb{E}[f(X_n)]$ converge si et seulement si $(p_n)_n$ converge.
2. Par définition, X_n converge en loi vers une limite X si et seulement si $\mathbb{E}[h(X_n)]$ converge vers $\mathbb{E}[h(X)]$ pour toute fonction h continue, bornée.
Or, toute fonction f continue et à support compact est bornée. Par la question 1, pour obtenir la convergence de $\mathbb{E}[f(X_n)]$ il est nécessaire et suffisant que la suite $(p_n)_n$ converge.
Dans le cas général d'une fonction h continue, bornée, il faut s'assurer que le terme $(1 - p_n)h(n)$ converge. Comme $(p_n)_n$ converge et h est bornée, il faut alors que $\lim_n (1 - p_n) = 0$.
On en déduit comme CNS pour la convergence en loi de X_n que $\lim_n p_n = 1$ et on a $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$.

Exercice 4. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires gaussiennes telles que $\mathbb{E}[X_n] = \mu_n$ et $\mathrm{Var}(X_n) = \sigma_n^2$. On suppose que $\mu_n \to \mu$ et $\sigma_n^2 \to \sigma^2$, montrer que X_n converge en loi et déterminer la limite.

Solution. Calculons d'abord la fonction caractéristique de la loi normale standard. Notons $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\phi_Z(t) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-itZ}] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-itz-z^2/2}\mathrm{d}z \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(z+it)^2\right\} \mathrm{d}z \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2},\end{aligned}$$

car on intègre une densité. On en déduit facilement la fonction caractéristique de la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Notons $Y = \sigma Z + \mu \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. On a

$$\phi_Y(t) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-it(\sigma Z+\mu)}] = \phi_Z(\sigma t)\mathrm{e}^{-i\mu t} = \mathrm{e}^{-i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}.$$

Or, pour $X_n \sim \mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$ on trouve

$$\phi_{X_n}(t) = \mathrm{e}^{-i\mu_n t - \frac{1}{2}\sigma_n^2 t^2} \longrightarrow \mathrm{e}^{-i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2},$$

car $\mu_n \to \mu$ et $\sigma_n^2 \to \sigma^2$. On en déduit que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Exercice 5. Soient $(X_n)_n$ des v.a. i.i.d. de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Calculer la fonction caractéristique ϕ_{X_1} et en déduire la loi de $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.
2. En utilisant le théorème limite central déterminer la limite de la suite

$$u_n = \mathrm{e}^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}.$$

Solution.

1. Calculons ϕ_{X_1} : pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_{X_1}(t) = \mathbb{E}[e^{itX_1}] = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\lambda e^{it}\right)^k}{k!} = \exp\left(\lambda\left(e^{it}-1\right)\right).$$

   Les variables X_i étant indépendantes et identiquement distribuées, on a

$$\phi_{S_n}(t) = \phi_{X_1}(t)^n = \exp\left(n\lambda\left(e^{it}-1\right)\right).$$

   La fonction caractéristiques caractérisant la loi d'une variable aléatoire, on en déduit que S_n suit une loi de Poisson de paramètre $n\lambda$.

2. Soit $\lambda = 1$. Alors S_n suit la loi de Poisson de paramètre n. On observe que $u_n = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(S_n = k) = \mathbb{P}(S_n \leq n)$.
   Or, par le TCL, lorsque $n \to \infty$,

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}S_n - \mathbb{E}[X_1]\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}S_n - \sqrt{n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \mathrm{Var}(X_1)) = \mathcal{N}(0,1),$$

   ce qui implique la convergence de la fonction de répartition de $\frac{1}{\sqrt{n}}S_n - \sqrt{n}$ vers la fonction de répartition Φ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ sur $\mathbb{R}$. Plus précisément, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}S_n - \sqrt{n} \leq t\right) = \Phi(t).$$

Avec $t = 0$, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} S_n - \sqrt{n} \leq 0\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n \leq n) = \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

Donc, $\lim_n u_n = \frac{1}{2}$.

Exercice 6. Soit $\{X_i\}_{i\geq 0}$ une suite i.i.d. de variables de Bernoulli de paramètre θ.

1. Montrer que $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \theta(1-\theta))$, où $\bar{X}_n = n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i$.
2. Montrer que $\bar{X}_n(1-\bar{X}_n) \to \theta(1-\theta)$ en probabilité.
3. Montrer que $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \theta)^2 \to 0$ en probabilité.
4. Déterminer la loi limite de $\sqrt{n}\left(\bar{X}_n(1-\bar{X}_n) - \theta(1-\theta)\right)$.

Solution. 1. Par le TCL, on a $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \theta) = \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mathbb{E}[X_1]) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \mathrm{Var}(X_1)) = \mathcal{N}(0, \theta(1-\theta))$.

2. Par la LGN, on a $\bar{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[X_1] = \theta$. La fonction $h(x) = x(1-x)$ étant continue, on obtient par le théorème de continuité, $\bar{X}_n(1-\bar{X}_n) = h(\bar{X}_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} h(\theta) = \theta(1-\theta)$.

3. On a
$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \theta)^2 = \underbrace{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \theta)}_{\xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\theta(1-\theta))} \underbrace{(\bar{X}_n - \theta)}_{\xrightarrow{\mathbb{P}} 0} \xrightarrow{\mathcal{L}} 0 \times \mathcal{N}(0, \theta(1-\theta)) = 0.$$
La convergence en loi vers une constante est équivalente à la convergence en probabilité, d'où le résultat.

4. On écrit
$$\begin{aligned}
\sqrt{n}\left(\bar{X}_n(1-\bar{X}_n) - \theta(1-\theta)\right) &= \sqrt{n}\left((\bar{X}_n - \theta)(1-\bar{X}_n) + \theta(1-\bar{X}_n) - \theta(1-\theta)\right) \\
&= \sqrt{n}\left((\bar{X}_n - \theta)(1-\bar{X}_n) - \theta(\bar{X}_n - \theta)\right) \\
&= \underbrace{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \theta)}_{\xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\theta(1-\theta))} \underbrace{(1 - \bar{X}_n - \theta)}_{\xrightarrow{\mathbb{P}} 1-2\theta} \\
&\xrightarrow{\mathcal{L}} (1-2\theta)\mathcal{N}(0, \theta(1-\theta)) = \mathcal{N}(0, (1-2\theta)^2\theta(1-\theta)),
\end{aligned}$$
par le lemme de Slutsky.

Exercice 7 (Lemme de Slutsky)**.** Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ et $(Y_n)_{n\geq 1}$ deux suites de v.a. réelles et X et Y deux variables aléatoires telles que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$.

1. On suppose que les (X_n, Y_n) sont indépendantes ainsi que les (X, Y). Montrer que $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X, Y)$.
2. Est-il toujours vrai que $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X, Y)$?
3. On suppose que Y est p.s. constante. Montrer que $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X, Y)$.

Solution. 1. On utilise le théorème de Paul Lévy. On définit Φ_{X_n,Y_n} la fonction caractéristique du couple (X_n, Y_n) et on a :
$$\Phi_{X_n,Y_n}(t, t') = \Phi_{X_n}(t)\Phi_{Y_n}(t') \longrightarrow \Phi_X(t)\Phi_Y(t') = \Phi_{(X,Y)}(t, t').$$

2. Ce n'est pas vrai en général : considérons $X_n = Z = Y_n$ où Z suit une loi Gaussienne centrée. Comme Z est symétrique, on a $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} -Z$. Mais si on avait $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (-Z, Z)$, alors on aurait $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} -Z + Z = 0$ alors que la loi de $X_n + Y_n$ est la loi de $2Z$. Contradiction.

3. On montre que $\mathbb{E}[f(X_n, Y_n)]$ converge vers $\mathbb{E}[f(X, Y)]$ pour toute fonction continue à support compact. Posons $a \in \mathbb{R}$ tel que $Y = a$ p.s. On a alors Y_n converge en probabilité vers a.
   L'inégalité triangulaire implique que
$$|\mathbb{E}[f(X_n, Y_n)] - \mathbb{E}[f(X, a)]| \leq |\mathbb{E}[f(X_n, Y_n)] - \mathbb{E}[f(X_n, a)]| + |\mathbb{E}[f(X_n, a)] - \mathbb{E}[f(X, a)]|$$
   On sait que $f(., a)$ est une fonction continue bornée, donc la convergence en loi de (X_n, a) vers (X, a) implique que
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[f(X_n, Y_n)] - \mathbb{E}[f(X_n, a)] = 0.$$
   Il reste donc à majorer $|\mathbb{E}[f(X_n, Y_n)] - \mathbb{E}[f(X_n, a)]|$. On sait que f est continue à support compact, donc en particulier f est uniformément continue. Pour $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que
$$\|(x, y) - (x', y')\|_1 \leq \delta \Longrightarrow |f(x, y) - f(x', y')| \leq \epsilon.$$
   On écrit alors que
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(X_n, Y_n)] - \mathbb{E}[f(X_n, a)]| &\leq \mathbb{E}|f(X_n, Y_n) - f(X_n, a)]| \\ &\leq \mathbb{E}|f(X_n, Y_n) - f(X_n, a)]|\mathbf{1}_{|Y_n - a|\leq\delta} + \mathbb{E}|f(X_n, Y_n) - f(X_n, a)]|\mathbf{1}_{|Y_n-a|>\delta} \\ &\leq \epsilon + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}[|Y_n - a| \geq \delta]\end{aligned}$$
   Le dernier terme tend vers 0, pour toute valeur de δ, donc pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier à partir duquel
$$\mathbb{E}[f(X_n, Y_n)] - \mathbb{E}[f(X_n, a)]| \leq \epsilon.$$
   D'où le résultat.

Exercice 8. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. i.i.d. de carré intégrable, de moyenne m et de variance $\sigma^2 > 0$. En notant $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ et $\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$, montrer que
$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - m}{\hat{\sigma}_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Solution. Commençons par étudier le comportement limite de $\hat{\sigma}_n^2$ quand $n \to +\infty$.
$$\begin{aligned}(n-1)\hat{\sigma}_n^2 &= \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X}_n)^2 \\ &= \sum_{k=1}^n (X_k - m)^2 + 2\sum_{k=1}^n (X_k - m)(m - \bar{X}_n) + n(m - \bar{X}_n)^2 \\ &= \sum_{k=1}^n (X_k - m)^2 - n(m - \bar{X}_n)^2.\end{aligned}$$
Donc
$$\begin{aligned}\frac{n-1}{n}\hat{\sigma}_n^2 &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n (X_k - m)^2 - (m - \bar{X}_n)^2 \\ &\xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}[(X_1 - m)^2] - 0 = \mathrm{Var}(X_1) =: \sigma^2,\end{aligned}$$
où la limite est donnée par la loi des grands nombres. Par suite, $\hat{\sigma}_n \to \sigma$ presque sûrement. Notons $Z_n = \sqrt{n}(\bar{X}_n - m)$ qui converge en loi, d'après le théorème limite central vers une variable aléatoire gaussienne $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. D'après le lemme de Slutsky, le couple $(Z_n, \hat{\sigma}_n^{-1})$ converge en loi vers (Z, σ^{-1}). En particulier, la fonction produit étant continue, $\frac{Z_n}{\hat{\sigma}_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z/\sigma \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Exercice 9. On considère une suite de v.a. indépendantes de loi μ et on pose

$$M_n = \max(X_1, \ldots, X_n).$$

1. Démontrer que si μ est la loi uniforme sur $[0,1]$ alors $n(1-M_n)$ converge en loi vers une limite à déterminer.
2. On suppose que μ est la loi de Cauchy standard, de densité

$$\mu(dx) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}dx.$$

Montrer que n/M_n converge en loi vers une limite à déterminer.

Solution. 1. On calcule

$$\mathbb{P}[n(1-M_n) \leq t] = \mathbb{P}(M_n \geq 1 - \frac{t}{n}) = 1 - (1-t/n)^n.$$

La limite de ce dernier terme est $1 - e^{-t}$. Ainsi, la variable $n(1-M_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{E}(1)$.

2. On suppose $t \leq 0$, on a alors

$$\mathbb{P}(n/M_n \leq t) \leq \mathbb{P}(n/M_n \leq 0) = \mathbb{P}(M_n \leq 0) = 2^{-n}.$$

Ainsi, pour $t \leq 0$, on a $\mathbb{P}(nM_n^{-1} \leq t) \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$.
On considère ensuite $t \geq 0$ et on vérifie que

$$\mathbb{P}(n/M_n \leq t) = \mathbb{P}(n/M_n \leq t\, M_n \leq 0) + \mathbb{P}(n/M_n \leq t\, M_n \geq 0) \leq 2^{-n} + \mathbb{P}(M_n \geq n/t)$$

Un calcul direct donne que

$$\mathbb{P}(M_n \geq n/t) = 1 - \left(\int_{-\infty}^{n/t} \frac{dx}{\pi(1+x^2)}\right)^n = 1 - \pi^{-n}\left(\frac{\pi}{2} + Atan(n/t)\right)^n$$

On utilise alors que

$$Atan(x) = \pi/2 - x^{-1} + o(x^{-1}) \qquad x \longrightarrow +\infty.$$

On obtient alors que

$$\mathbb{P}(M_n \geq n/t) \longrightarrow 1 - e^{-t/\pi}.$$

Ainsi, on a que $n/M_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{E}(1/\pi)$.