Ecole Polytechnique **lundi 24 juin 2019**
MAP 361

PC 9 : Intervalles de confiance

Exercice 1. *Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. d'une loi dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est donnée par*

$$f(x;\theta) = \frac{2}{\sqrt{\pi\theta}} \exp(-x^2/\theta) \mathbf{1}_{\{x>0\}},$$

où $\theta > 0$ est un paramètre inconnu. On observe une réalisation $(x_1, \dots, x_n)$ du vecteur aléatoire $(X_1, \dots, X_n)$. On désigne par α un réel donné dans $[0,1]$ et on note $\hat{m}_2(\mathbf{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$ le moment empirique d'ordre 2.

1. *Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}$ de θ.*
2. *Déterminer la loi de la variable $X_1/\sqrt{\theta}$. Déduire de ce résultat que la loi de la statistique $\hat{\theta}/\theta$ ne dépend pas de θ, puis donner la loi de $n\hat{\theta}/\theta$.*
3. *Trouver des réels a et b tels que $[\hat{\theta}/a, \hat{\theta}/b]$ soit un intervalle de confiance de niveau $1-\alpha$ pour θ.*

Solution.

1. La fonction de vraisemblance dans ce modèle est donnée par

$$\mathcal{L}(\mathbf{x};\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i;\theta) = \frac{2^n}{(\pi\theta)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n x_i^2\right\}.$$

On en déduit la fonction de log-vraisemblance :

$$\begin{aligned}\ell(\theta) = \log(\mathcal{L}(\mathbf{x};\theta)) &= n\log\frac{2}{\sqrt{\pi}} - \frac{n}{2}\log\theta - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n x_i^2 \\ &= n\log\frac{2}{\sqrt{\pi}} - \frac{n}{2}\log\theta - \frac{n}{\theta}\hat{m}_2(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

La première et seconde dérivée de $\ell(\theta)$ sont données par

$$\begin{aligned}\ell'(\theta) &= -\frac{n}{2\theta} + \frac{n}{\theta^2}\hat{m}_2(\mathbf{x}) \\ \ell''(\theta) &= \frac{n}{2\theta^2} - \frac{2n}{\theta^3}\hat{m}_2(\mathbf{x}) = \frac{n}{\theta^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\theta}\hat{m}_2(\mathbf{x})\right).\end{aligned}$$

On cherche les points critiques de $\ell(\theta)$:

$$\ell'(\theta) = 0 \iff -\frac{n}{2\theta} + \frac{n}{\theta^2}\hat{m}_2(\mathbf{x}) = 0 \iff \theta = 2\hat{m}_2(\mathbf{x}).$$

On vérifie s'il s'agit d'un point de maximum par la dérivée seconde. En effet, on a

$$\ell''(2\hat{m}_2(\mathbf{x})) = \frac{n}{4\hat{m}_2^2(\mathbf{x})}\left(\frac{1}{2} - 1\right) < 0.$$

L'unique point critique de $\ell(\theta)$ étant un maximum, on conclut qu'il est maximum global. Donc, l'EMV est donné par $\hat{\theta} = 2\hat{m}_2(\mathbf{x})$.

2. Notons $Y = X_1/\sqrt{\theta}$. Calculons la fonction de répartition et la densité de la loi de Y :

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(X_1/\sqrt{\theta} \le y) = F_{X_1}(y\sqrt{\theta}) \quad \text{et donc} \quad f_Y(y) = \sqrt{\theta} f_{X_1}(y\sqrt{\theta}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-y^2} \mathbf{1}_{]0,\infty[}(y).$$

On constate que la loi de Y ne dépend pas de θ.
On a

$$\frac{\hat{\theta}}{\theta} = \frac{2\hat{m}_2(\mathbf{x})}{\theta} = \frac{2}{n\theta}\sum_{i=1}^n X_i^2 = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i}{\sqrt{\theta}}\right)^2.$$

Avec $Y_i = X_i/\sqrt{\theta}$ pour $i = 1, \dots, n$, on a alors

$$\frac{\hat{\theta}}{\theta} = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2.$$

Il est clair que les variables aléatoires $Y_1, \dots, Y_n$ sont i.i.d. de même loi que Y, qui ne dépend pas de θ. Par conséquent, la loi de $\hat{\theta}/\theta$ ne dépend pas non plus de θ.
On peut calculer la loi de $n\hat{\theta}/\theta$ explicitement. D'abord, on constate que la variable aléatoire $2Y^2$ suit la loi χ_1^2, car pour tout $t > 0$,

$$F_{2Y^2}(t) = \mathbb{P}(2Y^2 \le t) = \mathbb{P}(Y \le \sqrt{t/2}) = F_Y\left(\sqrt{\frac{t}{2}}\right),$$

et donc

$$f_{2Y^2}(t) = \frac{1}{2\sqrt{2t}} f_Y\left(\sqrt{\frac{t}{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2t\pi}} \mathrm{e}^{-t/2} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} t^{1/2-1}\mathrm{e}^{-t/2}.$$

En utilisant que la somme de variables indépendantes de loi khi-deux suit toujours une loi khi-deux (cf. TD n°1, Ex.1), on en déduit que $n\hat{\theta}/\theta$ suit la loi χ_n^2.

3. On cherche a et b tels que

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= \mathbb{P}_\theta(\theta \in [\hat{\theta}/a, \hat{\theta}/b]) = \mathbb{P}_\theta\left(\frac{1}{a} \le \frac{\theta}{\hat{\theta}} \le \frac{1}{b}\right) = \mathbb{P}_\theta\left(nb \le \frac{n\hat{\theta}}{\theta} \le na\right) \\ &= F_{\chi_n^2}(na) - F_{\chi_n^2}(nb). \end{aligned}$$

On peut choisir a et b tel que $F_{\chi_n^2}(na) = 1-\alpha/2$ et $F_{\chi_n^2}(nb) = \alpha/2$. On a alors

$$a = q_{1-\alpha/2}(\chi_n^2)/n \qquad b = q_{\alpha/2}(\chi_n^2)/n.$$

Donc on obtient finalement l'intervalle de confiance

$$\left[\frac{n\hat{\theta}}{q_{1-\alpha/2}(\chi_n^2)}, \frac{n\hat{\theta}}{q_{\alpha/2}(\chi_n^2)}\right].$$

4. On a vu que $2Y_1 \sim \chi_1^2$. Par conséquent, $\mathbb{E}[2Y_1^2] = 1$ et $\mathrm{Var}(2Y_1^2) = 2$. D'après le TCL,

$$\begin{aligned} \sqrt{n}\left(\hat{\theta} - \theta\right) &= \sqrt{n}\left(\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \theta\right) = \theta\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 2Y_i^2 - 1\right) \\ &\xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \theta^2 \mathrm{Var}(2Y_1^2)) = \mathcal{N}(0, 2\theta^2), \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

On en déduit que $\sqrt{n/2}(\hat{\theta}/\theta - 1) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$.
Soit Z une variable aléatoire de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Rappelons que $q_{\alpha/2}^N = -q_{1-\alpha/2}^N$. On a

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= \mathbb{P}(Z \in [q_{\alpha/2}^N, q_{1-\alpha/2}^N]) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_\theta\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta} - 1\right) \in [-q_{1-\alpha/2}^N, q_{1-\alpha/2}^N]\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_\theta\left(-\sqrt{\frac{2}{n}} q_{1-\alpha/2}^N + 1 \le \frac{\hat{\theta}}{\theta} \le \sqrt{\frac{2}{n}} q_{1-\alpha/2}^N + 1\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_\theta\left(\frac{\hat{\theta}}{1+\sqrt{\frac{2}{n}} q_{1-\alpha/2}^N} \le \theta \le \frac{\hat{\theta}}{1-\sqrt{\frac{2}{n}} q_{1-\alpha/2}^N}\right). \end{aligned}$$

On déduit l'intervalle de confiance asymptotique de niveau $1-\alpha$ suivant :

$$\left[\frac{\hat{\theta}}{1+\sqrt{\frac{2}{n}} q_{1-\alpha/2}^N}, \frac{\hat{\theta}}{1-\sqrt{\frac{2}{n}} q_{1-\alpha/2}^N}\right].$$

Exercice 2 (Intervalles de confiance asymptotiques avec le TCL)**.** *Soit* $(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi. On suppose que* X_1 *est de carré intégrable, de moyenne* m *et de variance* $\sigma^2 > 0$*. On pose*

$$\widehat{m}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}, \qquad \widehat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \widehat{m}_n)^2.$$

(1) *Justifier que* $\sqrt{n} \cdot \frac{\widehat{m}_n - m}{\sigma}$ *converge en loi vers* $\mathcal{N}(0,1)$*, une gaussienne centrée réduite.*

(2) *En déduire un intervalle de confiance asymptotique pour* m *au niveau* 95% *(en supposant* σ *connu).*

(3) *Montrer que* $\widehat{\sigma}_n$ *converge presque sûrement vers* σ*. L'estimateur* $\widehat{\sigma}_n^2$ *est-il sans biais (*$\widehat{\sigma}_n^2$ *est sans biais si* $\mathbb{E}\widehat{\sigma}_n^2 = \sigma^2$*) ?*

(4) *Montrer que*

$$\sqrt{n} \cdot \frac{\widehat{m}_n - m}{\widehat{\sigma}_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0,1).$$

(5) *En déduire un intervalle de confiance asymptotique pour* m *au niveau* 95% *(en supposant* σ *inconnu).*

Solution.

(1) Ceci provient du théorème central limite car $\sqrt{n} \cdot \frac{\widehat{m}_n - m}{\sigma} = \frac{X_1 + \cdots + X_n - nm}{\sigma\sqrt{n}}$.

(2) Notons $z_{\alpha/2}$ le quantile le quantile d'ordre $1 - \alpha/2$ de la loi normale ($\mathbb{P}(Z \geq z_{\alpha/2}) = \alpha/2$ si Z est une loi normale centrée réduite). On a alors

$$\mathbb{P}\left(-z_{\alpha/2} \leq \sqrt{n} \cdot \frac{\widehat{m}_n - m}{\sigma} \leq z_{\alpha/2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(|Z| \leq z_{\alpha/2}) = \alpha.$$

L'intervalle

$$\widehat{I}_n = \left[\widehat{m}_n - \frac{\sigma z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}, \widehat{m}_n + \frac{\sigma z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right]$$

est donc un intervalle de confiance asymptotique au niveau $1 - \alpha$ %. En prenant $\alpha = 0.05$ et en utilisant le fait que $z_{\alpha/2} \simeq 1.96$, l'intervalle

$$\widehat{I}_n = \left[\widehat{m}_n - \frac{1.96 \cdot \sigma}{\sqrt{n}}, \widehat{m}_n + \frac{1.96 \cdot \sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

est donc un intervalle de confiance asymptotique au niveau 95%.

(3) Tout d'abord, on a

$$\widehat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k^2 - 2\widehat{m}_n X_k + \widehat{m}_n^2) = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2\right) - 2\widehat{m}_n^2 + \widehat{m}_n^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2\right) - \overline{X}_n^2.$$

D'après la loi forte des grands nombres, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2$ converge presque sûrement vers $\mathbb{E}X_1^2 = \sigma^2 + m^2$ et $\overline{X}_n$ converge presque sûrement vers m. Donc $\widehat{\sigma}_n^2$ converge presque sûrement vers σ^2. Donc $\widehat{\sigma}_n$ converge presque sûrement vers σ.

Pour étudier le biais de $\widehat{\sigma}_n^2$, calculons d'abord $\mathbb{E}\overline{X}_n^2$ en utilisant l'indépendance des variables aléatoires :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\overline{X}_n^2 &= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{1\leq i\neq j\leq n} \mathbb{E}X_i X_j + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}X_i^2\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\left((n^2 - n)\mathbb{E}X_1 \mathbb{E}X_2 + n(\sigma^2 + m^2)\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\left((n^2 - n)m^2 + n(\sigma^2 + m^2)\right) \\
&= m^2 + \frac{1}{n}\sigma^2.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathbb{E}\frac{n-1}{n} \cdot \widehat{\sigma}_n^2 = \sigma^2 + m^2 - \left(m^2 + \frac{1}{n}\sigma^2\right) = \frac{n-1}{n}\sigma^2.$$

Donc $\mathbb{E}\widehat{\sigma}_n^2 = \sigma^2$ et $\widehat{\sigma}_n^2$ est un estimateur sans biais de la variance.

(4) Comme $\widehat{\sigma}_n$ converge en probabilité vers σ, d'après le théorème de Slutsky, la convergence

$$\left(\sqrt{n}\cdot(\widehat{m}_n - m), \widehat{\sigma}_n\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (\sigma\mathcal{N}(0,1), \sigma)$$

a lieu conjointement en loi. En composant ceci par la fonction $f(x,y) = x/y$, continue sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$, on obtient le résultat voulu.

(5) Comme dans la première question, l'intervalle

$$\widehat{I}_n = \left[\widehat{m}_n - \frac{\widehat{\sigma}_n z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}, \widehat{m}_n + \frac{\widehat{\sigma}_n z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right]$$

est donc un intervalle de confiance asymptotique au niveau $1-\alpha$ % et l'intervalle

$$\widehat{I}_n = \left[\widehat{m}_n - \frac{1.96\cdot\widehat{\sigma}_n}{\sqrt{n}}, \widehat{m}_n + \frac{1.96\cdot\widehat{\sigma}_n}{\sqrt{n}}\right]$$

est donc un intervalle de confiance asymptotique au niveau 95%.

Exercice 3. *Le but de cet exercice est d'estimer le temps d'attente du RER B, qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ inconnu. Soit $(E_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ inconnu. On pose $\widehat{\lambda}_n = \frac{E_1+\cdots+E_n}{n}$ et*

$$\widehat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(E_k - \widehat{\lambda}_n)^2.$$

(1) Donner un intervalle de confiance asymptotique pour $\frac{1}{\lambda}$ au niveau 95%.

(2) Comment obtenir un intervalle de confiance asymptotique pour λ au niveau 95% ?

Solution.

(1) Comme $\mathbb{E}E_1 = \frac{1}{\lambda}$, nous pouvons appliquer l'exercice précédent :

$$\widehat{I}_n = \left[\widehat{\lambda}_n - \frac{1.96\cdot\widehat{\sigma}_n}{\sqrt{n}}, \widehat{\lambda}_n + \frac{1.96\cdot\widehat{\sigma}_n}{\sqrt{n}}\right]$$

est un intervalle de confiance asymptotique pour $\frac{1}{\lambda}$ au niveau 95%.

(2) Dire que $\frac{1}{\lambda}\in[A,B]$ est équivalent au fait que $\frac{1}{B}\leq\lambda\leq\frac{1}{A}$. On en déduit que

$$\widehat{J}_n = \left[\frac{1}{\widehat{\lambda}_n + \frac{1.96\cdot\widehat{\sigma}_n}{\sqrt{n}}}, \frac{1}{\widehat{\lambda}_n - \frac{1.96\cdot\widehat{\sigma}_n}{\sqrt{n}}}\right]$$

est un intervalle de confiance asymptotique pour λ au niveau 95%.

Alternativement, on aurait pu appliquer la méthode delta : en notant $\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$ la variance de E_1, en appliquant la méthode delta avec la fonction $f(x) = 1/x$ (dérivable en $1/\lambda$ avec $f'(1/\lambda) = -\lambda^2 \neq 0$), $\sqrt{n}\cdot\left(f(\widehat{\lambda}_n) - f(1/\lambda)\right)$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0,(f'(1/\lambda))^2\sigma^2)$. Ainsi, $\sqrt{n}\cdot\left(\frac{1}{\widehat{\lambda}_n}-\lambda\right)$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0,(f'(1/\lambda))^2\sigma^2) = \mathcal{N}(0,\lambda^2) = \mathcal{N}(0,1/\sigma^2)$. Ainsi,

$$\sigma\sqrt{n}\cdot\left(\frac{1}{\widehat{\lambda}_n}-\lambda\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0,1).$$

En appliquant le lemme de Slutsky, on obtient que

$$\widehat{\sigma}_n\sqrt{n}\cdot\left(\frac{1}{\widehat{\lambda}_n}-\lambda\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0,1).$$

On en déduit que

$$\left[\frac{1}{\widehat{\lambda}_n} - \frac{1.96}{\widehat{\sigma}_n\sqrt{n}}, \frac{1}{\widehat{\lambda}_n} + \frac{1.96}{\widehat{\sigma}_n\sqrt{n}}\right]$$

est un intervalle de confiance asymptotique pour λ au niveau 95%.

Exercice 4 (Comparaison d'estimateurs)**.** *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ des v.a.r. i.i.d. de loi uniforme sur $[0,\theta]$.*

1. *Étudier la convergence, le biais, la variance, le risque quadratique moyen, et la fluctuation asymptotique de l'estimateur $m_n = 2(X_1 + \cdots + X_n)/n$ de θ. Donner un intervalle de confiance asymptotique de niveau 95 %.*
2. *Montrer que l'estimateur de maximum de vraisemblance de θ est $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.*
3. *Montrer que l'estimateur M_n a pour densité $(n/\theta)(x/\theta)^{n-1}\mathbf{1}_{[0,\theta]}(x)$ puis calculer $\mathbb{E}(M_n)$ et $\mathrm{Var}(M_n)$. Comparer avec l'estimateur moyenne empirique m_n.*
4. *Montrer que $M_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta$, puis que la convergence est en fait presque sûre.*
5. *Montrer que $W_n = n(M_n/\theta - 1)$ converge en loi quand $n \to \infty$, et déterminer la limite. Donner un intervalle de confiance asymptotique de niveau 95 %.*
6. *Donner un intervalle de confiance exacte de niveau $1 - \alpha$ pour M_n.*

Solution. Pour un estimateur $\hat{\theta}_n$ de θ, l'écart quadratique moyen possède toujours une décomposition (carré-du-)biais–variance : $\mathbb{E}((\hat{\theta}_n - \theta)^2) = (\mathbb{E}(\hat{\theta}_n) - \theta)^2 + \mathrm{Var}(\hat{\theta}_n)$. Cela découle du théorème de Pythagore dans L^2 : $\mathbb{E}((Z - \theta)^2) = \mathrm{Var}(Z) + (\mathbb{E}(Z) - \theta)^2$. Note : $\mathrm{Var}(Z) = \arg\min_{c \in \mathbb{R}} \mathbb{E}((Z - c)^2)$.

1. La LGN entraîne que $m_n \to \theta$ p.s. L'estimateur n'est pas biaisé : $\mathbb{E}(m_n) = \theta$. La variance est égale à l'écart quadratique moyen, et vaut $\frac{4}{n}\mathrm{Var}(X_1) = \frac{\theta^2}{3n} = \mathcal{O}(\frac{1}{n})$. La fluctuation asymptotique est gaussienne, de vitesse $\sqrt{n}$, car par le TCL, $\sqrt{n}(m_n - \theta) \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \frac{\theta^2}{3})$. L'intervalle de confiance asymptotique s'obtient avec le résultat de fluctuation. Nul besoin du lemme de Slutsky car l'inversion en θ est facile ici : si $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $J \subset \mathbb{R}$,
$$\mathbb{P}(Z \in J) \approx \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{3n}}{\theta}(m_n - \theta) \in J\right) = \mathbb{P}(\theta \in m_n/(1 + (3n)^{-1/2}J))$$
Tout intervalle J tel que $\mathbb{P}(Z \in J) = 1 - \alpha$ fournit l'intervalle de confiance $I = m_n/(1 + (3n)^{-1/2}J)$ de niveau $1 - \alpha$ pour θ. On peut chercher à choisir J de sorte que I soit petit ;
2. Pour tout réel $\theta \geq 0$, on a $L(\theta; X_1, \ldots, X_n) = \theta^{-n}\prod_{k=1}^{n}\mathbf{1}_{[0,\theta]}(X_k)$, qui vaut 0 si $\theta < M_n$ et qui décroît comme θ^{-n} si $\theta \geq M_n$. Donc $M_n = \arg\max_{\theta \geq 0} L(\theta; X_1, \ldots, X_n)$.
3. $F_{M_n}(x) = (x/\theta)^n\mathbf{1}_{[0,\theta]} + \mathbf{1}_{]\theta,\infty[}$ et $f_{M_n}(x) = F'_{M_n}(x) = (n/\theta)(x/\theta)^{n-1}\mathbf{1}_{[0,\theta]}(x)$. Par conséquent, $\mathbb{E}(M_n) = \frac{n}{n+1}\theta$ et $\mathrm{Var}(M_n) = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}\theta^2 = \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$. L'estimateur M_n est baisé (et asymptotiquement sans biais), mais il est plus rapide que m_n. L'écart quadratique moyen de M_n vaut $(\mathbb{E}(M_n) - \theta)^2 + \mathrm{Var}(M_n) = \frac{\theta^2}{(n+1)^2} + \frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)} = \frac{2}{(n+1)(n+2)}\theta^2 = \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$;
4. Pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, $\mathbb{P}(|M_n - \theta| > \varepsilon) = \mathbb{P}(M_n < \theta - \varepsilon) = ((\theta - \varepsilon)/\theta)^n$. Cela donne la convergence en probabilité de M_n vers θ. Comme p.s. $(M_n)_{n \geq 1}$ est positive croissante et majorée par θ, elle converge p.s. et dans L^1 vers une v.a.r. $\leq \theta$ de moyenne $\lim_{n \to \infty}\mathbb{E}(M_n) = \theta$, qui est forcément égale p.s. à θ ;
5. $F_{W_n}(x) = \mathbb{P}(M_n \leq \theta(1 + x/n))$. Ainsi, $F_{W_n}(x) \to 1$ si $x > 0$, tandis que si $x \leq 0$ alors, pour $n \gg 1$, $F_{W_n}(x) = (1 + x/n)^n \to e^x$. Ainsi, $W_n \to -W$ en loi quand $n \to \infty$, où $W \sim \mathrm{Exp}(1)$. L'intervalle de confiance asymptotique s'obtient avec la fluctuation : Pour tout $J \subset \mathbb{R}$, on a
$$\mathbb{P}(-W \in J) \approx \mathbb{P}(W_n \in J) = \mathbb{P}(\theta \in M_n/(1 + J/n)).$$
N'importe quel intervalle J tel que $\mathbb{P}(-W \in J) = 1 - \alpha$ fournit l'intervalle de confiance asymptotique $I = M_n/(1 + J/n)$ pour θ. On peut choisir J tel que I soit petit.
6. On a vu à la question 4. que $\mathbb{P}(M_n < \theta - \varepsilon) = (1 - \varepsilon/\theta)^n$. Donc en posant $\varepsilon = u\theta$, avec $u \in]0,1[$, on obtient
$$\mathbb{P}(\theta \geq M_n \geq \theta(1 - u)) = 1 - (1 - u)^n$$
et donc
$$\mathbb{P}(\theta \in [M_n, M_n/(1 - u)]) = 1 - (1 - u)^n.$$
Si l'on fixe un niveau $\alpha \in]0,1[$, on obtient donc
$$\mathbb{P}(\theta \in [M_n, M_n/\alpha^{1/n}]) = 1 - \alpha.$$
L'intervalle $[M_n, M_n/\alpha^{1/n}]$ est donc un intervalle de confiance exacte de niveau $1 - \alpha$. Remarque : $\alpha^{-1/n} = \exp(-\frac{\ln\alpha}{n}) \sim (1 + \frac{\ln(1/\alpha)}{n})$ lorsque $n \to +\infty$. Donc l'intervalle trouvé est de longueur $O(1/n)$ tandis que l'intervalle donné par le TCL était de longueur $O(1/\sqrt{n})$.

Exercice 5 (Sondage)**.** *Dans une population de très grande taille, un sondage, effectué par tirage uniforme sans remise, sur la popularité du premier ministre indique que 51% des personnes interrogées sont favorables à sa politique.*

1. *Proposer une modélisation avec une loi hypergéométrique, puis avec des v.a.r. i.i.d. de loi de Bernoulli.*
2. *Donner un intervalle bilatéral symétrique de niveau de confiance asymptotique* 95% *pour la proportion* p *de personnes favorables au premier ministre. Plusieurs variantes peuvent être envisagées.*
3. *Donner un intervalle de confiance non-asymptotique en utilisant l'inégalité de Hoeffding.*
4. *Application numérique. Le sondage a été réalisé auprès de* $n = 1000$ *personnes ; donner les intervalles de confiance obtenus précédemment. Même question si* $n = 10000$.

Solution.

1. 1ère modélisation : Notons F la population française qui se décompose en $F = F_+ \cup F_-$, où F_+ est l'ensemble des personnes favorables à l'action du premier ministre, et F_- l'ensemble des personnes qui y sont défavorables. On note $N_+ = \mathrm{Card}(F_+)$, $N_- = \mathrm{Card}(F_-)$ et $N = N_+ + N_- = \mathrm{Card}(F)$. Le sondage s'apparente à un tirage sans remise et donc l'ensemble Ω de tous les résultats possibles pour cette expérience aléatoire est
$$\Omega = \{A \subset F : \mathrm{Card}(A) = n\} \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{Card}(\Omega) = \binom{N}{n}.$$
Prenons n_1, n_2 tels que $n = n_1 + n_2$, alors
$$\mathbb{P}(\text{Obtenir } n_1 \text{ personnes favorables et } n_2 \text{ personnes défavorables}) = \frac{\binom{N_+}{n_1}\binom{N_-}{n_2}}{\binom{N}{n}}.$$
2ème modélisation : Soit $(\varepsilon_i)_{n \geq i \geq 1}$ une suite de variables de Bernoulli indépendantes de paramètre $p = N_+/N$. Les variables ε_i représentent les réponses des n personnes interrogées (considérées comme indépendantes). Dans le cadre de cette modélisation, on a
$$\mathbb{P}(\text{Obtenir } n_1 \text{ personnes favorables et } n_2 \text{ personnes défavorables}) = \binom{n}{n_1} p^{n_1}(1-p)^{n_2}.$$
Lien entre les deux modèles : On considère la limite du premier modèle quand $N \to +\infty$ de sorte que $N_+/N \to p$ et $N_-/N \to (1-p)$.
$$\begin{aligned}\frac{\binom{N_+}{n_1}\binom{N_-}{n_2}}{\binom{N}{n}} &= \frac{n!}{n_1!n_2!}\,\frac{\prod_{i=0}^{n_1-1}(N_+ - i)\prod_{i=0}^{n_2-1}(N_- - i)}{\prod_{i=0}^{n-1}(N-i)}\\ &= \frac{n!}{n_1!n_2!}\left(\frac{N_+}{N}\right)^{n_1}\left(\frac{N_-}{N}\right)^{n_2}\frac{\prod_{i=0}^{n_1-1}(1 - i/N_+)\prod_{i=0}^{n_2-1}(1 - i/N_-)}{\prod_{i=0}^{n-1}(1-i/N)}\\ &\to \frac{n!}{n_1!n_2!}p^{n_1}\,(1-p)^{n_2}\end{aligned}$$
2. On adopte dans la suite la deuxième modélisation. En posant $\hat{m}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \varepsilon_i$, la loi forte des grands nombres entraîne que $\hat{m_n} \to p$ et le TLC que $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}(\hat{m}_n - p) \to Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Pour tout $a > 0$, on a donc
$$\mathbb{P}\left(|\hat{m}_n - p| \leq \frac{a}{\sqrt{n}}\sqrt{p(1-p)}\right) \to \mathbb{P}(|Z| \leq a)$$
lorsque $n \to +\infty$. Pour obtenir des bornes indépendantes du paramètre inconnu p, on peut envisager plusieurs possibilités.
1ère possibilité : on utilise la majoration $\sqrt{p(1-p)} \leq 1/2$. On obtient alors que
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(|\hat{m}_n - p| \leq \frac{a}{2\sqrt{n}}\right) \geq \mathbb{P}(|Z| \leq a)$$
Pour $a = 1.96$, on sait que $\mathbb{P}(|Z| \leq a) = 0.95$. Donc $[\hat{m}_n - \frac{1.96}{2\sqrt{n}}; \hat{m}_n + \frac{1.96}{2\sqrt{n}}]$ est un intervalle de confiance de asymptotique de niveau 0.95 par excès. Pour $N = 1000$, on trouve $[0.479; 0.541]$ et pour $N = 10000$, $[0.500; 0.519]$.

2ème possibilité : on estime p dans le terme de variance. En effet, par Slutsky, $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\hat{m}_n(1-\hat{m}_n)}}(\hat{m}_n - p) \to Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ et donc en raisonnant comme précédemment, on conclut que

$$\left[\hat{m}_n - \frac{1.96}{\sqrt{n}\sqrt{\hat{m}_n(1-\hat{m}_n)}}; \hat{m}_n + \frac{1.96}{\sqrt{n}\sqrt{\hat{m}_n(1-\hat{m}_n)}}\right]$$

est un intervalle de confiance asymptotique de niveau 0.95. Pour $n = 1000$, on trouve $[0.479; 0.541]$ et pour $n = 10000$, $[0.500; 0.519]$ (donc comme précédemment car $\hat{m}_n \simeq 0.5$).
3ème possibilité : On résout (par rapport à p) le système d'inéquations

$$\begin{aligned}
&\hat{m}_n - \frac{a}{\sqrt{n}}\sqrt{p(1-p)} \leq p \leq \hat{m}_n + \frac{a}{\sqrt{n}}\sqrt{p(1-p)} \\
&\Leftrightarrow (p - \hat{m}_n)^2 \leq \frac{a^2}{n}p(1-p) \\
&\Leftrightarrow p \in [r_1, r_2] \text{ où } r_1, r_2 \text{ sont les racines de } (X - \hat{m}_n)^2 - \frac{a^2}{n}X(1-X) = 0
\end{aligned}$$

On peut calculer ces deux racines :

$$r_1 = \frac{2\hat{m}_n + \frac{a^2}{n} - \sqrt{(2\hat{m}_n + \frac{a^2}{n})^2 - 4\left(1 + \frac{a^2}{n}\right)\hat{m}_n^2}}{2\left(1 + \frac{a^2}{n}\right)}$$

$$r_2 = \frac{2\hat{m}_n + \frac{a^2}{n} + \sqrt{(2\hat{m}_n + \frac{a^2}{n})^2 - 4\left(1 + \frac{a^2}{n}\right)\hat{m}_n^2}}{2\left(1 + \frac{a^2}{n}\right)}$$

3. On rappelle que si $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées à valeurs dans $[a, b]$ alors, d'après l'inégalité d'Hoeffding,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mathbb{E}[X_1]\right| > t\right) \leq 2\exp\left(-2n\frac{t^2}{(b-a)^2}\right), \qquad \forall t \geq 0.$$

Ici, on obtient donc

$$\mathbb{P}(|\hat{m}_n - p| > t) \leq 2e^{-2nt^2}, \qquad \forall t \geq 0.$$

En prenant t de sorte que $2e^{-2nt^2} = \alpha$, i.e $t = \sqrt{-\frac{1}{2n}\ln(\alpha/2)}$, on voit que

$$\left[\hat{m}_n - \sqrt{\frac{\ln(2/\alpha)}{2}}\frac{1}{\sqrt{n}}; \hat{m}_n + \sqrt{\frac{\ln(2/\alpha)}{2}}\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

est un intervalle de confiance exacte de niveau $1-\alpha$ par excès. Pour $n = 1000$, on trouve $[0.467; 0.552]$ et pour $n = 10000$, on trouve $[0.496; 0.523]$. Ces intervalles sont donc légèrement plus pessimistes que ceux obtenus avec le TLC, mais ils ont l'avantage d'être exacts.

Exercice 6 (Téléphonie)**.** *Un central téléphonique dessert* 5000 *abonnés. À tout instant, un abonné a une probabilité égale à 0.02 d'utiliser son téléphone. Les appels des abonnés sont supposés indépendants entre eux. Quel est le nombre d'abonnés que le central doit être capable de traiter simultanément pour qu'à tout instant, la probabilité que tous les abonnés ne puissent être satisfaits soit inférieure a 2,5% ?*

Solution. On se place à un instant donné. Soit X_i une variable aléatoire de Bernoulli, de paramètre $p = 0.02$, qui indique si l'abonné i utilise son téléphone. Les v.a.r. $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ sont i.i.d. et $n = 5000$. Le nombre d'appels simultanés est $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathrm{Binom}(n,p) \approx \mathcal{N}(np, np(1-p))$ (d'après TCL). On cherche donc un nombre m tel que $\mathbb{P}(np + \sqrt{np(1-p)}Z \geq m) \leq 0.025$, où $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Le quantile $1 - 0.025$ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ vaut $q = 1.96$ et on prend alors $m = \lceil np + q\sqrt{np(1-p)}\rceil = 120$.

Exercice 7 (Modèle de Poisson)**.** *Soit* $(X_1, \ldots, X_n)$ *un échantillon i.i.d. de la loi de Poisson* $\mathcal{P}(\lambda)$ *de paramètre* $\lambda > 0$ *inconnu. Notons* $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ *et* $\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$.

1. *Montrer que* $\bar{X}_n$ *est un estimateur sans biais de* λ*, qu'il est consistant et asymptotiquement normal.*
2. *Montrer que* $\hat{\sigma}_n^2$ *est un estimateur sans biais de* λ *et qu'il est consistant.*

3. *En utilisant le lemme de Slutsky, montrer que $\hat{\sigma}_n^2$ est asymptotiquement normal. (On utilisera, sans le démontrer, que $\mathbb{E}_\lambda[(X_1-\lambda)^4] = \lambda + 3\lambda^2$).*
4. *Quel estimateur de λ est à privilégier, $\bar{X}_n$ ou $\hat{\sigma}_n^2$?*
5. *En partant de $\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$, montrer qu'on peut obtenir les résultats de convergence suivants*
   (a) $\sqrt{n}\dfrac{\bar{X}_n-\lambda}{\sqrt{\bar{X}_n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$
   (b) $\sqrt{n}\dfrac{\bar{X}_n-\lambda}{\sigma_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$
   (c) $\sqrt{n}\left(g(\bar{X}_n)-g(\lambda)\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$ *pour un choix approprié de la fonction g à préciser.*
6. *Déterminer les intervalles de confiances de niveau asymptotique $1-\alpha$ correspondants. Lequel est le meilleur ?*

Solution.

1. On rappelle, pour $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$, on a $\mathbb{E}[X] = \mathrm{Var}(X) = \lambda$. Alors l'estimateur $\bar{X}_n$ est alors sans biais ($\mathbb{E}[\bar{X}_n] = \lambda$), consistant en vertu de la LFGN ($\bar{X}_n \longrightarrow \mathbb{E}[X_1] = \lambda$ $p.s.$), et enfin, $\bar{X}_n$ est asymptotiquement normal par le TCL :
$$\sqrt{n}(\bar{X}_n-\lambda) = \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mathbb{E}[X_1]) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\mathrm{Var}(X_1)) = \mathcal{N}(0,\lambda), \quad \text{lorsque } n\to\infty.$$
2. Montrons que l'estimateur $\hat{\sigma}_n^2$ est sans biais pour λ.
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\hat{\sigma}_n^2] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{n}{n-1}\bar{X}_n^2\right] = \frac{n}{n-1}\mathbb{E}\left[X_1^2\right] - \frac{1}{(n-1)n}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n X_i^2 + \sum_{i\neq j} X_iX_j\right]\\ &= \frac{n}{n-1}(\lambda^2+\lambda) - \frac{1}{(n-1)n}\left(n(\lambda^2+\lambda)+n(n-1)\lambda^2\right) = \frac{n}{n-1}(\lambda^2+\lambda) - \frac{n\lambda^2+\lambda}{n-1} = \lambda.\end{aligned}$$
La consistance de $\hat{\sigma}_n^2$ pour λ découle de la LFGN
$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_n^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{n}{n-1}\bar{X}_n^2 = \underbrace{\frac{n}{n-1}}_{\to 1}\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2}_{\to\mathbb{E}[X_1^2]=\lambda^2+\lambda\ p.s.} - \underbrace{\frac{n}{n-1}}_{\to 1}(\underbrace{\bar{X}_n}_{\to\mathbb{E}[X_1]=\lambda\ p.s.})^2\\ &\longrightarrow \lambda^2+\lambda-\lambda^2 = \lambda\ p.s..\end{aligned}$$
3. Nous voulons montrer que $\sqrt{n}(\hat{\sigma}_n^2-\lambda) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\sigma^2)$. On a
$$\begin{aligned}\sqrt{n}(\hat{\sigma}_n^2-\lambda) &= \sqrt{n}\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i-\bar{X}_n)^2 - \lambda\right)\\ &= \sqrt{n}\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i-\lambda+\lambda-\bar{X}_n)^2 - \lambda\right)\\ &= \sqrt{n}\left\{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i-\lambda)^2 + \frac{n}{n-1}(\lambda-\bar{X}_n)^2 + \frac{2}{n-1}(\lambda-\bar{X}_n)\sum_{i=1}^n (X_i-\lambda) - \frac{1}{n-1}\lambda\right\}\\ &= \sqrt{n}\left\{\frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i-\lambda)^2 - \lambda\right) + \frac{1}{n-1}\lambda + \frac{n}{n-1}(\bar{X}_n-\lambda)^2 - \frac{2n}{n-1}(\bar{X}_n-\lambda)^2\right\}\\ &= \underbrace{\frac{n}{n-1}}_{\to 1}\underbrace{\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i-\lambda)^2 - \mathbb{E}[(X_1-\lambda)^2]\right)}_{\xrightarrow{d}\mathcal{N}(0,\mathrm{Var}((X_1-\lambda)^2))} + \underbrace{\frac{\sqrt{n}}{n-1}}_{\to 0}\lambda - \underbrace{\frac{\sqrt{n}}{n-1}}_{\to 0}\underbrace{(\underbrace{\sqrt{n}(\bar{X}_n-\lambda)}_{\xrightarrow{d}\xi\sim\mathcal{N}(0,\mathrm{Var}(X_1))})^2}_{\xrightarrow{d}\xi^2}\\ &\xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,\mathrm{Var}((X_1-\lambda)^2)),\end{aligned}$$

lorsque $n \to \infty$. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}((X_1-\lambda)^2) &= \mathbb{E}[(X_1-\lambda)^4] - (\mathbb{E}[(X_1-\lambda)^2])^2\\ &= \lambda + 3\lambda^2 - (\mathrm{Var}(X_1))^2 = \lambda + 3\lambda^2 - \lambda^2 = \lambda + 2\lambda^2.\end{aligned}$$

On déduit enfin que

$$\sqrt{n}(\hat{\sigma}_n^2 - \lambda) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \lambda + 2\lambda^2), \quad n \to \infty.$$

4. Tous les deux estimateurs sont sans biais, consistants et asymptotiquement normaux (avec la même vitesse de convergence de $n^{-1/2}$). Ce qui fait une différence entre les deux estimateurs sont leurs variances limites. La variance limite de $\bar{X}_n$ vaut λ, alors que la variance limite de $\hat{\sigma}_n^2$ vaut $\lambda + \lambda^2$. On préfère alors l'estimateur $\bar{X}_n$, car sa variance limite est plus petite quelque soit la valeur de λ.

5. [(i)]

   En utilisant la question a) et le lemme de Slutsky, on obtient

$$\sqrt{n}\left(\frac{\bar{X}_n - \lambda}{\sqrt{\bar{X}_n}}\right) = \underbrace{\sqrt{n}\left(\frac{\bar{X}_n - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)}_{\xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)} \underbrace{\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\bar{X}_n}}}_{\xrightarrow{P} \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\mathbb{E}[X_1]}} = 1} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

(b) De même,

$$\sqrt{n}\left(\frac{\bar{X}_n - \lambda}{\sqrt{\hat{\sigma}_n^2}}\right) = \underbrace{\sqrt{n}\left(\frac{\bar{X}_n - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)}_{\xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)} \underbrace{\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\hat{\sigma}_n^2}}}_{\xrightarrow{P} \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\mathbb{E}[\hat{\sigma}_n^2]}} = 1} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

(c) D'après la delta méthode, pour toute fonction g continûment dérivable sur $\mathbb{R}_+$, on a

$$\sqrt{n}\left(g(\bar{X}_n) - g(\lambda)\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, (g'(\lambda))^2 \mathrm{Var}(X)).$$

Nous cherchons donc une fonction g telle que la variance limite vaut 1. Ce qui veut dire

$$(g'(\lambda))^2 \mathrm{Var}(X) = 1 \Leftrightarrow (g'(\lambda))^2 = \frac{1}{\lambda}.$$

On peut alors choisir $g(u) = 2\sqrt{u}$ avec dérivée $g'(u) = 1/\sqrt{u}$ et on obtient

$$\sqrt{n}\left(2\sqrt{\bar{X}_n} - 2\sqrt{\lambda}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)^2 \lambda\right) = \mathcal{N}(0,1).$$

6. Notons par ζ une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Notons par q_γ^N le quantile d'ordre $\gamma \in [0,1]$ de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. En utilisant le résultat de la question e) (i), on obtient

$$\begin{aligned}1-\alpha &= \mathbb{P}(\zeta \in [q_{\alpha/2}^N, q_{1-\alpha/2}^N])\\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\sqrt{n}\left(\frac{\bar{X}_n - \lambda}{\sqrt{\bar{X}_n}}\right) \in [q_{\alpha/2}^N, q_{1-\alpha/2}^N]\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\lambda \in \left[\bar{X}_n - \sqrt{\frac{\bar{X}_n}{n}} q_{1-\alpha/2}^N, \bar{X}_n - \sqrt{\frac{\bar{X}_n}{n}} q_{\alpha/2}^N\right]\right).\end{aligned}$$

On a montré que $\mathcal{I}_1 = \left[\bar{X}_n - \sqrt{\frac{\bar{X}_n}{n}} q_{1-\alpha/2}^N, \bar{X}_n - \sqrt{\frac{\bar{X}_n}{n}} q_{\alpha/2}^N\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique pour λ de niveau $1-\alpha$. De même, par la question e) (ii),

$$\begin{aligned}1-\alpha &= \mathbb{P}(\zeta \in [q_{\alpha/2}^N, q_{1-\alpha/2}^N])\\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\sqrt{n}\left(\frac{\bar{X}_n - \lambda}{\sqrt{\hat{\sigma}_n^2}}\right) \in [q_{\alpha/2}^N, q_{1-\alpha/2}^N]\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\lambda \in \left[\bar{X}_n - \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{n}} q_{1-\alpha/2}^N, \bar{X}_n - \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{n}} q_{\alpha/2}^N\right]\right).\end{aligned}$$

On a alors un deuxième intervalle de confiance asymptotique donné par $\mathcal{I}_2 = \left[\bar{X}_n - \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{n}} q_{1-\alpha/2}^N, \bar{X}_n - \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{n}} q_{\alpha/2}^N\right]$. Pour les cas (iii) on obtient

$$\begin{aligned}
1-\alpha &= \mathbb{P}(\zeta \in [q_{\alpha/2}^N, q_{1-\alpha/2}^N]) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(2\sqrt{n}\left(\sqrt{\bar{X}_n} - \sqrt{\lambda}\right) \in [q_{\alpha/2}^N, q_{1-\alpha/2}^N]\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\sqrt{\lambda} \in \left[\sqrt{\bar{X}_n} - \frac{1}{2\sqrt{n}} q_{1-\alpha/2}^N, \sqrt{\bar{X}_n} - \frac{1}{2\sqrt{n}} q_{\alpha/2}^N\right]\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\lambda \in \left[\left(\sqrt{\bar{X}_n} - \frac{1}{2\sqrt{n}} q_{1-\alpha/2}^N\right)^2, \left(\sqrt{\bar{X}_n} - \frac{1}{2\sqrt{n}} q_{\alpha/2}^N\right)^2\right]\right).
\end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{I}_3 = \left[\left(\sqrt{\bar{X}_n} - \frac{1}{2\sqrt{n}} q_{1-\alpha/2}^N\right)^2, \left(\sqrt{\bar{X}_n} - \frac{1}{2\sqrt{n}} q_{\alpha/2}^N\right)^2\right]$ est un troisième intervalle de confiance asymptotique.

Pour comparer ces trois intervalles de confiance asymptotiques, on compare leurs longueurs. En utilisant $q_{\alpha/2}^N = -q_{1-\alpha/2}^N$, on obtient les longueurs suivantes

$$\begin{aligned}
\ell(\mathcal{I}_1) &= \bar{X}_n - \sqrt{\frac{\bar{X}_n}{n}} q_{\alpha/2}^N - \bar{X}_n + \sqrt{\frac{\bar{X}_n}{n}} q_{1-\alpha/2}^N = 2\sqrt{\frac{\bar{X}_n}{n}} q_{1-\alpha/2}^N \\
\ell(\mathcal{I}_2) &= \bar{X}_n - \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{n}} q_{\alpha/2}^N - \bar{X}_n + \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{n}} q_{1-\alpha/2}^N = 2\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{n}} q_{1-\alpha/2}^N \\
\ell(\mathcal{I}_3) &= \left(\sqrt{\bar{X}_n} + \frac{1}{2\sqrt{n}} q_{1-\alpha/2}^N\right)^2 - \left(\sqrt{\bar{X}_n} - \frac{1}{2\sqrt{n}} q_{1-\alpha/2}^N\right)^2 = 2\sqrt{\frac{\bar{X}_n}{n}} q_{1-\alpha/2}^N
\end{aligned}$$

Les intervalles $\mathcal{I}_1$ et $\mathcal{I}_3$ ont la même longueur. La différence avec $\mathcal{I}_2$ est un facteur $\sqrt{\hat{\sigma}_n^2}$ au lieu de $\sqrt{\bar{X}_n}$. Dans la question d) nous avons observé que la variance limite de $\bar{X}_n$ est inférieure à celle de $\hat{\sigma}_n^2$. On préfère alors les intervalles $\mathcal{I}_1$ et $\mathcal{I}_3$ à $\mathcal{I}_2$.