Algèbre Linéaire

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes réels que l'on munit de sa base canonique $(1, X, X^2, \dots)$. En particulier, on notera e_n le polynôme $e_n = X^n$. L'objet de ce premier problème est d'étudier l'application

$$\phi : P \mapsto P'' - XP'.$$

Question 1 : 1. Montrer que ϕ est une application linéaire.

2. Pour tout entier n , calculer $\phi(e_n)$. En déduire le degré de $\phi(P)$ lorsque P est de degré d .
3. En écrivant

$$P = \sum_{n=0}^d a_n e_n,$$

déterminer le coefficient dominant de $\phi(P)$.

Question 2 : 1. Déterminer le noyau de ϕ .

2. L'application ϕ est-elle surjective ? (On ne demande pas de déterminer son image à ce stade du problème).

Question 3 : 1. On dira que P est un polynôme pair (resp. impair) si ses coefficients de degrés impairs (resp. pairs) sont nuls. On notera en particulier $\mathcal{P}[X]$ et $\mathcal{I}[X]$ ces ensembles de polynômes pairs et impairs. Démontrer que

$$P \in \mathcal{P}[X] \iff \forall x \in \mathbb{R} : P(-x) = P(x).$$

2. Démontrer de même que

$$P \in \mathcal{I}[X] \iff \forall x \in \mathbb{R} : P(-x) = -P(x).$$

3. Montrer que $\mathcal{P}[X]$ et $\mathcal{I}[X]$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.
4. Démontrer que ces espaces sont stables par ϕ , c'est-à-dire :

$$P \in \mathcal{P}[X] \implies \phi(P) \in \mathcal{P}[X] \quad \text{et} \quad P \in \mathcal{I}[X] \implies \phi(P) \in \mathcal{I}[X].$$

Question 4 : On notera $\tilde{\phi}$ l'application induite par ϕ de $\mathcal{I}[X]$ dans $\mathcal{I}[X]$.

1. Déterminer le noyau de $\tilde{\phi}$.
2. Démontrer que $\tilde{\phi}$ est surjective, c'est-à-dire que

$$\text{Im}(\tilde{\phi}) = \mathcal{I}[X].$$

On pourra par exemple démontrer par récurrence sur n que le sous-espace $\mathcal{I}[X] \cap \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ est contenu dans l'image de $\tilde{\phi}$.

3. $\tilde{\phi}$ étant bijectif, on note ψ son application réciproque de $\mathcal{I}[X]$ dans $\mathcal{I}[X]$. Déterminer alors $\psi(X)$, $\psi(X^3)$ et $\psi(X^5)$.

Question 5 : On va maintenant chercher l'image de ϕ . Pour cela, on se donne une suite $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de nombre réels et on définit l'application :

$$\Theta : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k P^{(k)}(0) \in \mathbb{R}.$$

1. Démontrer que le réel $\Theta(P)$ est bien défini et l'exprimer en fonction des coefficients du polynôme P dans la base $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$. (On démontrera en particulier que la somme précédente n'est pas "infinie").
2. Démontrer que Θ est linéaire.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la suite $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ pour que Θ soit surjective sur $\mathbb{R}$. On cherchera en particulier à démontrer $\text{Im}(\Theta) = \mathbb{R}$ en utilisant des polynômes $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
4. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, calculer la dérivée k-ième de $\phi(P)$ en fonction de celles de P .
5. En déduire l'expression de

$$\Theta(\phi(P)).$$

Question 6 : 1. Démontrer que

$$\text{Im}(\phi) = \ker \Theta \iff \forall k \in \mathbb{N} \quad \Theta(\phi(e_k)) = 0.$$

2. Montrer que cette dernière condition se ramène à une relation de récurrence portant sur la suite $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$.
3. En déduire que le noyau de Θ contient l'image de ϕ si et seulement si

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \lambda_{2k+1} = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_{2k} = \frac{\lambda_0}{2^k k!}.$$

4. Montrer enfin que

$$\text{Im}(\phi) = \left\{ P \in \mathbb{R}[X] \mid \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(0)}{2^k k!} = 0 \right\}.$$

On s'inspirera en particulier du mode de raisonnement de la question 11.

Dans ce second problème, E désignera un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie n non nulle. L'objectif est entre autres de démontrer que toute application linéaire f de E dans E satisfait

$$\exists p \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \ker(f^p) \oplus \text{Im}(f^p) = E. \quad (1)$$

Question 1 : Si f est une bijection de E , donner une valeur de p satisfaisant (1).

Question 2 : Pour $n = 3$, on considère la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et f l'application linéaire de matrice A dans la base $\mathcal{B}$ donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base de $\ker(f)$ et de $\text{Im}(f)$. Peut-on choisir $p = 1$ pour satisfaire (1) ?
2. Déterminer dans ce même cas $\ker(f^2)$ et $\text{Im}(f^2)$ et démontrer que

$$\ker(f^2) \oplus \text{Im}(f^2) = E.$$

Question 3 : Pour m un paramètre réel, on définit f_m l'application linéaire de matrice dans la base canonique de dimension 4 :

$$A_m = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -m & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base de $\ker(f_m)$ et de $\text{Im}(f_m)$. Peut-on choisir $p = 1$ dans (1) ? On discutera suivant les valeurs de m .
2. Déterminer le plus petit élément vérifiant (1) pour f_m .

Question 4 : On étudie le cas général et on considère f une application linéaire de E dans E non bijective.

1. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1}) \quad \text{et} \quad \text{Im}(f^{k+1}) \subset \text{Im}(f^k).$$

2. On pose pour tout entier k , $d_k = \dim(\ker(f^k))$. Montrer que d_k est une suite croissante d'entiers.
3. Établir que nécessairement, il existe un entier $p \leq n$ tel que

$$\forall k \leq p - 1 \quad \ker(f^k) \neq \ker(f^{k+1}) \quad \text{et} \quad \ker(f^p) = \ker(f^{p+1}).$$

4. Démontrer alors par récurrence que

$$\forall k \geq p \quad \ker(f^k) = \ker(f^p).$$

5. Montrer enfin que

$$E = \ker(f^p) \oplus \text{Im}(f^p).$$