Année 2013/2014 Université Paul Sabatier

L3 MMESI Intégration et Probabilités 2
TD1 - Variables aléatoires

Exercice 1. Soit X une v.a. réelle.

1. Préciser le lien entre densité et fonction de répartition.
2. Soit $r > 0$, on suppose que X ne prend que des valeurs positives, démontrer alors que

$$\mathbb{E}X^r = \int_0^{+\infty} rx^{r-1}\mathbb{P}(X > x)dx$$

Exercice 2. Soit X une v.a. rélle à valeurs dans $E \subset \mathbb{R}$ et f une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. On définit $Y = f(X)$.

1. On suppose que X a une densité et que f est injective et $\mathcal{C}^1$. Quelle est la loi de Y?
2. Si X suit une loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2$, quelle fonction f assure que $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$?
3. Soit U une v.a. de loi uniforme sur $[0, 1]$., montrer que $-\ln(U)$ suit une loi exponentielle de paramètre 1.
4. Soit U une v.a. de loi uniforme sur $[0, 1]$., montrer que $\tan(\pi(U - \frac{1}{2}))$ suit une loi de Cauchy de densité $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$.
5. Soit U de loi uniforme sur $[0, \pi]$, trouver la loi de $sin(U)$.
6. Soit U de loi uniforme sur $[-1, 1]$, donner la loi de
   (a) $|U|$
   (b) U^2
   (c) $\frac{1}{2}\log(1 + U)/(1 - U)$
7. Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes de loi normales $\mathcal{N}(0, 1)$.
   (a) Donner la loi de X/Y.
   (b) En déduire la loi de $1/Z$ si Z est une variable aléatoire de Cauchy.

Exercice 3. Soient X et Y deux v.a. indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1.

1. Donner la densité du couple (X, Y).
2. Calculer la densité du couple $(X, X + Y)$.
3. Calculer la densité de $X + Y$.

Exercice 4. Soit X et Y deux v.a. indépendantes de loi de densité $f(x) = \frac{1}{x^2}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}$. On pose $U = XY$ et $V = \frac{X}{Y}$.

1. Calculer la densité du couple (U, V). Les v.a. U et V sont-elles indépendantes ?
2. Calculer les lois de U et de V.
3. Calculer $\mathbb{E}(\frac{1}{V\sqrt{U}})$.

Exercice 5. Soit X_1, X_2 et X_3 trois v.a. indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1. On pose $S_1 = X_1$, $S_2 = X_1 + X_2$ et $S_3 = X_1 + X_2 + X_3$; $U_1 = \frac{S_1}{S_3}$, $U_2 = \frac{S_2}{S_3}$. Calculer la loi du triplet (U_1, U_2, S_3). Puis celle de (U_1, U_2).

Exercice 6. Pour tout $a > 0$, on pose $\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}dx$. Un variable aléatoire réelle est dite v.a.r. gamma de paramètre a et λ ($a > 0$, $\lambda > 0$), notée $G(a, \lambda)$, si sa loi a pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue $\gamma_{a,\lambda}$ où

$$\gamma_{a,\lambda}(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}e^{-\lambda x}x^{a-1}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x).$$

1. Vérifier que $\Gamma(a)$ est définie pour $a > 0$, montrer que $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ et calculer $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Soit X une v.a.r. de loi $G(a, \lambda)$. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $Var(X)$.
3. Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de lois respectives $G(a, \lambda)$ et $G(b, \lambda)$.
   (a) Montrer que $X + Y$ et $\frac{X}{X+Y}$ sont indépendantes et calculer leur loi de probabilité. En déduire que
   $$\beta(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$
   (b) Donner la loi de probabilité de $\frac{X}{Y}$.
   (c) Soient $X_1, ..., X_n$ n v.a.r. indépendantes de même loi exponentielle de densité $\lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}$, donner la loi de probabilité de $S_n = X_1 + ... + X_n$.
4. Soient $Y_1, ..., Y_n$ n v.a.r. indépendantes gaussiennes centrées réduites.
   (a) Montrer que Y_1^2 a la loi $G(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. En déduire la valeur de $\Gamma(\frac{1}{2})$.
   (b) En déduire la loi de $Y_1^2 + ... + Y_n^2$ et calculer $\mathbb{E}(Z)$ et $Var(Z)$.

Exercice 7.

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé discret et X une v.a. définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{N}$. On définit la fonction génératrice par
$$G_X(s) = \mathbb{E}s^X = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X = k)s^k$$

1. Démontrer que G_X est bien définie sur $[-1; 1]$.
2. Montrer que G_X caractérise la loi de X.
3. Si la loi de X possède deux premiers moments, démontrer qu'alors G_X est de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer alors que
$$G'_X(1) = \mathbb{E}(X) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}(X^2) = G"_X(1) + G'_X(1).$$
4. Donner l'expression de la fonction génératrice dans les cas suivants:
   - Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$
   - Loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.
   - Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.
   - Loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.
5. Dans le cas où X et Y sont indépendantes, démontrer que
$$G_{X+Y} = G_X G_Y.$$
6. En déduire le lien entre la loi Binomiale et la somme de lois de Bernoulli.
7. Même question pour la somme de lois de Poisson.
8. Une application sur le pipage de dés
   1. Quelle est la fonction génératrice de la loi uniforme sur $\{2, 3, \ldots, \ldots 12\}$.
   2. Soient X_1 et X_2 2 v.a. indépendantes sur $\{1, 2, \ldots, 6\}$. En étudiant les racines du polynôme $G_{X_1}G_{X_2}$, montrer que la loi de $X_1 + X_2$ ne peut être uniforme sur $[2, 12]$.
   3. Peut-on piper deux dés indépendants de manière à obtenir toutes les sommes entre les 2 dés équiprobables.