Année 2014/2015 UNIVERSITÉ TOULOUSE I CAPITOLE

Mise à niveau Maths 1

TD 1 **Réduction des endomorphismes**

Exercices purement techniques

Exercice 1.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Trouver les valeurs propres de A et les sous-espaces propres correspondants. En déduire une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Exercice 2.

On considère les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Diagonaliser ou trigonaliser ces matrices.

Exercice 3.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver, sans calculer le polynôme caractéristique, les valeurs propres de A. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

Exercice 4.

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même définie par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (-3x + y - z, -7x + 5y - z, -6x + 6y - 2z).$$

1. Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer son polynôme caractéristique.
3. Calculer les valeurs et vecteurs propres de f.
4. Montrer que f n'est pas diagonalisable.
5. Donner le noyau et l'image de f.

Exercice 5.

Soit a un réel et f_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f_a(x, y, z) = (x + z, -x + 2y + z, (2 - a)x + (a - 2)y + az).$$

1. Quelles sont les valeurs propres de f_a?
2. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles f_a est diagonalisable.

Applications plus poussées

Exercice 6.

Soit M la matrice donnée par

$$M = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}$$

Calculer son polynôme caractéristique.

Exercice 7.

Calculer par récurrence le polynôme caractéristique de la matrice (dite " matrice compagnon ") :

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{p-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{p-1} \end{pmatrix}$$

Exercice 8.

Le but de l'exercice est de résoudre le système différentiel suivant:

$$\left\{ \begin{array}{cl} x'(t) & = -t \\ x'(t) - y'(t) + z'(t) & = 0 \\ 3x'(t) + 2z'(t) & = 1 \end{array} \right.$$

associé à la condition initiale $(x(0), y(0), z(0)) = (2, 6, 1)$.

1. Mettre le système sous forme matricielle.
2. Calculer le polynôme caractéristique, les valeurs propres et vecteurs propres.
3. Montrer que la matrice est diagonalisable et calculer la matrice de passage.
4. Résoudre le système diagonal.
5. Revener au système de départ et conclure avec les conditions initiales.

Exercice 9.

Soit E l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n et u l'application définie par

$$\forall P \in E \qquad u(P) = X(X-1)P' - nXP$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel de dimension finie et donner sa dimension et une base.
2. Montrer que u est un endomorphisme.
3. Trouver les valeurs propres et vecteurs propres de u.
4. Donner le noyau de u et l'image réciproque de $\{1\}$.

Exercice 10.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. Trouver une valeur propre évidente de A et déterminer l'espace propre associé.
2. Montrer que A est diagonalisable et la diagonaliser.
3. Déterminer l'ensemble des matrices M telles que $AM + MA = 0$.

Aller plus loin

Exercice 11.

Soient U et V deux matrices colonnes non nulles de taille n.

1. Montrer que U^tV est de rang 1.
2. En déduire les éléments propres de U^tV.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur U et V pour que U^tV soit diagonalisable.

Exercice 12.

Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

1. $X^2 = X$.
2. $X^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
3. $X^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$
4. $X^2 + X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 13.

Soit M inversible dans $\mathbb{C}$ telle que M^2 est diagonalisable. Montrer que M^2 est aussi diagonalisable.

Exercice 14.

Soit a un réel non nul.

1. Chercher les éléments propres de l'endomorphisme φ_a de $\mathbb{R}[X]$ défini par
$$\varphi_a(P)(X) = P(X - a).$$
2. Chercher les éléments propres de l'endomorphisme ψ_a de $\mathbb{R}[X]$ défini par
$$\psi_a(P)(X) = P(a - X).$$

Exercice 15. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{C}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré n. On se donne $(A, B) \in \mathbb{C}_n[X]^2$ tels que $deg(A) = n$ et A possède des zéros tous simples. On considère l'application f qui associe à un polynôme P le reste de la division euclidienne de PB par A.

1. Déterminer le noyau de f.
2. Déterminer l'image de f.
3. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de f.