Année 2013/2014 Université Paul Sabatier

L3 MMESI Intégration et Probabilités 2

TD2 - Fonctions Caractéristiques, Transformée de Fourier Fonctions génératrices

Exercice 1. [Lois symétriques] Loi d'une variable aléatoire X est dite symétrique si $-X$ a la même loi que X.

1. À quelle condition une loi à densité f par rapport à la mesure de Lebesgue est-elle symétrique ?
2. Soient X, Y indépendantes de même loi, exprimer $\Phi_X, \Phi_{-X}, \Phi_{X+Y}, \Phi_{X-Y}$.
3. Donner une C.N.S. sur la fonction caractéristique de X pour que sa loi soit symétrique.
4. Soit Y une v.a. rélle et Z une v.a. indépendante de Y de loi donnée par
$$\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(Z = -1) = 1/2.$$
Montrer que la loi de $X = ZY$ est symétrique et calculer sa fonction caractéristique en fonction de Φ_Y. Si Y a une densité f, quelle est la loi de X ?
5. Une loi de Cauchy a pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue :
$$p_{x_0,a}(x) = \frac{1}{\pi a\left[1 + \left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2\right]}.$$
Montrer que la convolée de deux lois de Cauchy est une loi de Cauchy.

Exercice 2. [Calculs de fonctions caractéristiques]

1. Calculer Φ_X lorsque $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$. En déduire Φ_Z où $Z \sim \Gamma(n, \lambda)$.
2. Soit X une v.a. de loi de Laplace, c'est-à-dire de densité $x \longmapsto e^{-|x|/2}$. Calculer la fonction caractéristique de X.
3. En déduire la fonction caractéristique d'une v.a. suivant une loi de Cauchy de paramètre 1 (densité $x \longmapsto \frac{1}{\pi(1+x^2)}$).
4. Quelle est la loi de la moyenne de deux lois de Cauchy de paramètre 1 ?
5. Soient X_1, X_2, X_3 et X_4 des v.a. gaussiennes centrées réduites indépendantes. Rappeler la valeur de Φ_{X_i}. Calculer $\Phi_{X_1X_2}$ en utilisant le théorème de Fubini puis $\Phi_{X_1X_2+X_3X_4}$. En déduire la loi de $X_1X_2 + X_3X_4$.

Exercice 3. Trouver une v.a. X telle que
$$\Phi_X^2 = \Phi_{2X}.$$
En déduire que la propriété $\Phi_{X+Y} = \Phi_X\Phi_Y$ n'implique pas l'indépendance de X et Y.

Exercice 4. On considère le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par
$$C = \left\{(x, y) \in [0, 1]^2 \,|\, x - \frac{1}{2} \leq y \leq x \,\text{ou}\, y \geq x + \frac{1}{2}\right\}.$$

1. Dessiner l'ensemble C.

2. Soient X, Y deux v.a. de densité $f_{X,Y}$ par rapport à la mesure de Lebesgue qu'on suppose constante sur C et nulle ailleurs. Calculer la valeur de cette constante et démontrer qu'alors X et Y ne sont pas indépendantes.
3. Calculer les fonctions caractéristiques de X, Y, $X+Y$ et véfirier que

$$\Phi_{X+Y} = \Phi_X \Phi_Y.$$

Exercice 5. Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, proposer une méthode rapide de calcul des moments de X :

$$\mathbb{E}X^{2n} = \frac{(2n)!}{n!2^n}$$

Exercice 6. Soient X_n une suite de v.a. i.i.d. de même loi à valeurs dans $\mathbb{N}$ et T une variable aléatoire indépendante à valeur dans $\mathbb{N}^*$. On définit alors

$$S = \sum_{j=1}^{T} X_j.$$

On rappelle que les fonctions génératrices sont définies par

$$G_X(s) = \mathbb{E}s^X.$$

1. Si G_T et G_X désigne les fonctions génératrices de T et X, démontrer que

$$G_S = G_T \circ G_X.$$

2. Si X_1 et T admettent pour moyenne m et t, calculer alors la moyenne de S (*Formule de Wald*).
3. Calculer alors la variance de S et démontrer que

$$Var(S) = \mathbb{E}[T]Var(X_1) + \mathbb{E}[X_1^2]Var(T)$$

Exercice 7. [Processus de Galton-Watson] En étudiant le mécanisme de l'extinction des noms de famille noble en Grande-Bretagne, Galton et Watson ont été amenés à étudier le processus suivant. On considère des particules pouvant donner naissance à des particules de même nature. Au départ on suppose qu'il y a 1 particule (génération 0). Chaque particule a la même probabilité p_k de produire elle même k particules et on note

$$\mu = \sum_{k \geq 0} k p_k.$$

La quantité μ est donc l'espérance pour une particule du nombre d'enfants. On note $N_1 = X_{1,1}$ le nombre de particules à l'instant 1 qui sont issus de la génération 0 d'un seul individu. Puis

$$N_2 := X_{2,1} + \ldots + X_{2,N_1}.$$

On définit alors par récurrence le processus de Galton-Watson $N_n := X_{n-1,1} + X_{n-1,2} + \ldots + X_{n-1,N_{n-1}}$. On s'intéresse à la probabilité d'extinction $p_n = \mathbb{P}(N_n = 0)$. On suppose que $p_0 \neq 0$

1. On note G_n la fonction génératrice de N_n et $G = G_1$. Démontrer que

$$G_{n+1} = G_n \circ G = G \circ G_n.$$

2. En déduire que p_n satisfait :

$$p_1 = G(0) \quad \text{et} \quad p_{n+1} = G(p_n).$$

3. Démontrer que la limite $\xi = \lim_{n \longrightarrow +\infty} p_n$ existe.
4. Montrer que si $\mu \leq 1$, alors $\xi = 1$.
5. Montrer que si $\mu \geq 1$, alors $\xi < 1$.