

Mise à niveau Maths 1

TD 2 Formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques

Exercices purement techniques

Exercice 1.

Décomposer en sommes ou différences de carrés les formes quadratiques:

$$q_1(x, y, z) = x^2 + 3y^2 - 2z^2 + 2xy - 2yz + 2zx,$$

et

$$q_2(x, y, z) = xy + yz + zx.$$

Exercice 2. Montrer que la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ donnée par

$$a_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}$$

est définie positive.

Exercice 3.

Soit φ définie par

$$Q(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2.$$

1. Donner la matrice représentant la forme quadratique Q .
2. Q est-elle dégénérée?
3. Déterminer une base orthonormale pour Q .
4. Déterminer la signature de Q .

Exercice 4. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $f_1, \dots, f_n$ des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On définit la matrice

$$A = \left(\int_a^b f_i f_j \right)_{i,j}.$$

1. Démontrer que A est symétrique et positive.
2. Établir que A est définie positive si et seulement si $(f_1, \dots, f_n)$ forment une famille libre de fonctions.

Exercice 5. Montrer que la matrice A définie par

$$A = nId - \mathbf{1},$$

où $\mathbf{1}$ désigne la matrice carrée ne contenant que des 1 est symétrique positive. Est-elle définie positive?

Exercice 6.

Soit A une matrice symétrique réelle définie positive et U un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On définit l'application J par

$$\forall X \in \mathbb{R}^n \quad J(X) = X^t A X - 2X^t U.$$

1. Vérifier que

$$J(X) \geq J(A^{-1}U).$$

2. Montrer qu'en réalité, $A^{-1}U$ est l'unique minimum de J .

Exercice 7.

Calculer le minimum sur $\mathbb{R}^2$ de

$$f(a, b) = \int_{-1}^1 (e^x - ax - b)^2 dx.$$

On pourra penser à introduire un produit scalaire ainsi qu'une projection adéquate.

Exercice 8. Démontrer que pour toute matrice S symétrique positive, on a

$$\text{Tr}(S) \geq n (\det(S))^{1/n}.$$

En déduire que

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad |\det(A)| \leq \left(\frac{1}{n} \text{Tr}(A^t A) \right)^{n/2}.$$

Aller plus loin

Exercice 9.

On considère une forme quadratique q sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vérifiant

$$\forall (X, Y) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})^2 \quad q(XY) = q(X)q(Y).$$

Dans la suite, on supposera que $q \neq 0$.

1. Démontrer que $q(I_2) = 1$.
2. En déduire que lorsque X est inversible, alors

$$q(X) \neq 0.$$

3. Démontrer qu'à l'inverse, lorsque X est de rang 1, alors $q(X) = 0$.
4. Démontrer que pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et X telle que P_X (le polynôme caractéristique de X) soit scindé, alors

$$q(X - \lambda I_2) = \det(X - \lambda I_2).$$

5. Étendre ce résultat au cas où X est quelconque.
6. Identifier enfin la forme quadratique q .

Exercice 10.

1. Étant données 2 matrices réelles A et B telles que A est symétrique positive et B symétrique définie positive, démontrer qu'on peut trouver P inversible telle que

$$A = PD^t P \quad \text{et} \quad B = P^t P.$$

2. En utilisant ce résultat de réduction simultanée, en déduire que

$$\det(A + B) \leq \det(A) + \det(B).$$

3. Étendre ce résultat par densité aux cas plus généraux où A et B sont uniquement symétriques positives (non nécessairement définies).

4. Démontrer que l'ensemble des matrices symétriques définies positives est une partie convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
5. En utilisant à nouveau un résultat de diagonalisation simultanée, établir que $\log \circ \det$ est une fonction log concave.

Exercice 11. On considère A une matrice symétrique positive.

1. Démontrer l'inégalité de Hadamard:

$$\det(A) \leq \prod_{i=1}^n a_{i,i}.$$

2. En déduire que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$|\det(A)| \leq \sqrt{\prod_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{k,i}^2 \right)}$$

Exercice 12. Soit A une matrice symétrique réelle de taille $n \times n$ et p un entier entre 1 et n . On définit A_p comme étant la matrice extraite de A contenant les p premières lignes et p premières colonnes de A .

1. Démontrer que si A est positive, alors $\det(A_p) \geq 0$ pour tout entier p .
2. La réciproque est-elle vraie?
3. Démontrer que A est définie positive si et seulement si

$$\forall p \in \{1 \dots n\} \quad \det(A_p) > 0.$$

4. En déduire que l'ensemble des matrices symétriques définies positives est un ouvert de l'ensemble des matrices symétriques réelles.