**Année 2013/2014** UNIVERSITÉ PAUL SABATIER

# L3 MMESI INTEGRATION-PROBABILITES 2

TD 3
**Vecteurs gaussiens**

**Exercice 1. Exercice de rappel sur la normalisation de la loi Gaussienne.** Soit $I = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$.

1. Montrer que $I^2 = \int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dxdy$.
2. En utilisant un changement de variable en coordonnées polaires calculer $I^2$ puis $I$.
3. En utilisant un changement de variable approrié calculer $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_{\mathbb{R}^+} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt$.

**Exercice 2.** Soient $(U, R)$ un couple de variables aléatoires indépendantes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ de lois marginales pour $U$ une loi uniforme sur $[0, 2\pi]$, pour $R$ une loi de densité par rapport à la mesure de Lebesgue:

$$\frac{1}{2} \exp\left(-\frac{r}{2}\right) \mathbf{1}_{]0,+\infty[}(r)$$

1. En justifiant votre réponse, montrer que la loi du couple $(U, R)$ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue que l'on donnera.
2. Soit $(X, Y) = (\sqrt{R}\cos U, \sqrt{R}\sin U)$. Démontrer que que la loi du couple $(X, Y)$ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue que l'on calculera.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ et $(Z, T) = A(X, Y)^T$. Donner les lois marginales de $Z$ et $T$. Ces variables sont-elles indépendantes ? (On pourra étudier au préalable la loi du couple).

**Exercice 3.** Soit $(X, Y)$ un vecteur aléatoire gaussien centré de matrice de covariance $\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix}$. Montrer que $X$ et $Y$ sont proportionnels.

**Exercice 4.** Soit $X$ une v.a.r. de loi gaussienne centrée réduite et $\varepsilon$ une v.a.r. de Rademacher (i.e. $\mathbb{P}(\varepsilon = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon = -1) = \frac{1}{2}$ indépendantes.

1. Calculer la loi de $Y = \varepsilon X$.
2. Calculer la covariance entre $X$ et $Y$.
3. Montrer que $X + Y$ ne suit pas une loi gaussienne.
4. Les v.a. $(X, Y)$ sont-elles indépendantes ?

**Exercice 5.** Soit $X_i$, $i = 1, 2, 3$ trois v.a. indépendantes définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ de loi gaussienne centrée réduite et soit $\overline{X} = \frac{1}{3}[X_1 + X_2 + X_3]$, $\overline{V} = \frac{1}{2}[(X_1 - \overline{X})^2 + (X_2 - \overline{X})^2 + (X_3 - \overline{X})^2]$. On lui associe les vecteurs $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} X_1 - \overline{X} \\ X_2 - \overline{X} \\ X_3 - \overline{X} \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} X_1 - \overline{X} \\ X_2 - \overline{X} \\ X_3 - \overline{X} \\ \overline{X} \end{pmatrix}$.

1. Le but de cette question est de calculer la loi de $X$, $Y$, $Z$ et $\overline{X}$.
   (a) Montrer que $X$ est un vecteur gaussien dont on déterminera le vecteur moyenne et la matrice de variance covariance.
   (b) Montrer que $\overline{X}$ est une v.a. gaussienne dont on calculera la moyenne et la variance.
   (c) Montrer que $Z$ est un vecteur gaussien dont on déterminera le vecteur moyenne et la matrice de variance covariance.
   (d) Montrer que $Y$ est un vecteur gaussien dont on déterminera le vecteur moyenne et la matrice de variance covariance.
2. L'objet de cette question est de calculer la loi de $\overline{V}$.

(a) Montrer que $Y = AX$ où $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) On admettra qu'il existe une matrice $P$ vérifiant $P^tP = I_3$ et $A = P^t \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P$. Donner la loi de $PY$.

(c) Calculer la loi de $\overline{V}$. On pourra remarquer que $\overline{V} = Y^tY$.

3. Montrer que les variables aléatoires $Y$ et $\overline{X}$ sont indépendantes.

4. En déduire que les v.a. $\overline{V}$ et $\overline{X}$ sont indépendantes.

**Exercice 6.** Soit $\Phi$ la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Montrer que, lorsque $x \to +\infty$, et pour tout $x > 1$, on a :

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} < 1 - \Phi(x) < \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

2. En déduire que pour tout $a > 0$, lorsque $x \to +\infty$,

$$\frac{1 - \Phi(x + \frac{a}{x})}{1 - \Phi(x)} \to e^{-a}.$$

3. Montrer que pour tout $b > 0$, lorsque $x \to +\infty$,

$$\frac{1 - \Phi(x + b)}{1 - \Phi(x)} \to 0.$$

**Exercice 7.** Soit $\rho \in [-1,1]$, $(m_1, m_2) \in \mathbb{R}^2$, $(\sigma_1^2, \sigma_2^2) \in \mathbb{R}^2$. Construire deux v.a.r. gaussiennes $X_1$ et $X_2$ de moyenne $m_1$ et $m_2$, de variance $\sigma_1^2$ et $\sigma_2^2$ de coefficient de corrélation $\rho$.

**Exercice 8.** Soit $(X, Y)$ une v.a. gaussienne bi-dimensionnelle avec $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 > 0$, et soit $\rho$ le coefficient de corrélation linéaire de $X$ et $Y$. Montrer que $X$ et $Y - \rho X$ sont indépendantes.

**Exercice 9.** Soit $X$ une v.a.r. de loi gaussienne centrée réduite. On note $\varphi_X$ sa fonction caractéristique.

1. Montrer que $\varphi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \cos(tx) e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad t \in \mathbb{R}$.

2. Montrer que $\varphi"(t) = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \cos(tx) e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad t \in \mathbb{R}$.

3. Montrer que $\varphi"(t) = t^2 \varphi(t), \quad t \in \mathbb{R}$.