

Mise à niveau Maths 1
TD 3 Espaces vectoriels normés

Exercice 1.

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on définit

$$N(x, y) = \max \{|x|, |y|, |x - y|\}.$$

1. Démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$ et dessiner la boule unité.
2. Trouver les constantes optimales α et β telles que pour tout u de $\mathbb{R}^2$:

$$\alpha N(u) \leq \|u\|_\infty \leq \beta N(u).$$

Exercice 2.

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on définit

$$N_1(x, y) = \max \left(\sqrt{x^2 + y^2}, |x - y| \right) \quad \text{et} \quad N_2(x, y) = \sqrt{x^2/9 + y^2/4}.$$

1. Démontrer que N_1 et N_2 sont des normes et représenter les boules unités.
2. Démontrer que

$$N_2 \leq \|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_2 \leq N_1 \leq \|\cdot\|_1 \leq \sqrt{18} N_2.$$

3. Déterminer le plus petit réel k tel que

$$\|\cdot\|_1 \leq k N_2.$$

On utilisera à profit l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 3. Démontrer que tout parallélogramme plein non aplati de $\mathbb{R}^2$ est la boule unité d'une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4.

Sur l'espace $\mathbb{R}^n$, on définit

$$N_p(x) = \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p} \quad \text{et} \quad N_\infty(x) = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

1. Démontrer que ce sont des normes.
2. Démontrer qu'elles sont équivalentes et déterminer les constantes d'équivalence entre ces normes.

Exercice 5. On définit

$$N_p(x) = \left(\sum_{i=1}^{+\infty} x_i^p \right)^{1/p} \quad \text{et} \quad N_\infty(x) = \sup_i |x_i|.$$

1. Pour $p = 1, 2, +\infty$, dessiner la boule unité associée.
2. Démontrer que N_p est une norme pour $p \geq 1$.
3. Démontrer que N_p n'est pas une norme si $p < 1$.
4. Montrer que

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} N_p(x) = N_\infty(x).$$

5. Étendre ces résultats au cas des fonctions.

Exercice 6.

Soit $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles carrées de taille $n \times n$ et $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Le but de l'exercice est de démontrer que la norme subordonnée à la norme euclidienne de A (vue comme une application linéaire continue) est

$$\|A\| = \sqrt{\rho(A^t A)}.$$

1. Montrer que si S est symétrique réelle et si m et M désignent respectivement la plus petite et plus grande valeur propre de S , alors

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad m \leq \frac{x^t S x}{\|x\|_2^2} \leq M.$$

2. Démontrer que le maximum du quotient précédent est atteint en un point x_0 et que

$$\frac{x^t S x}{\|x\|_2^2} \leq M$$

3. Soit A carrée réelle. Montrer que $A^t A$ est symétrique réelle dont les valeurs propres sont toutes positives ou nulles.

4. Montrer que

$$\|A\| = \sqrt{\rho(A^t A)}.$$

Exercice 7. Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1])$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$. On définit alors

$$\forall f \in E \quad N(f) = \int_0^1 x |f(x)| dx \quad \tilde{N}(f) = \sqrt{\int_0^1 x |f(x)|^2 dx}.$$

1. Démontrer que N et $\tilde{N}$ sont des normes sur E .
2. Montrer que

$$\forall f \in E \quad N(f) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{N}(f)$$

3. Démontrer que N et $\tilde{N}$ ne sont pas équivalentes. On considérera pour cela la suite de fonctions

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0, 1] \quad f_n(x) = [n - n^2 x] \mathbf{1}_{0 \leq x \leq 1/n}.$$

Exercice 8. Déterminer si les applications suivantes sont linéaires continues et si oui, calculer leur norme.

1. $T : (\mathcal{C}^0([0, 1]), \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$

$$T(f) = f(0).$$

2. $T : (\mathcal{C}^0([0, 1]), \|\cdot\|_1) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$

$$T(f) = f(0).$$

Exercice 9. Soit $E = \mathbb{R}[X]$, on pose

$$N_1(P) = \sup_{0 \leq x \leq 1} |P(x)| \quad \text{et} \quad N_2(P) = \sup_{1 \leq x \leq 2} |P(x)|.$$

On considère également la forme linéaire

$$\phi(P) = P(0).$$

1. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur E .

2. Montrer que ϕ est une application linéaire continue sur (E, N_1) et calculer sa norme.
3. Montrer que ϕ n'est pas continue sur (E, N_2) . On considérera $P_n(t) = (1 - t/2)^n$.
4. Soit $O = \{P \in E : \phi(P) \neq 0\}$. Montrer que 0 est ouvert pour N_1 mais pas pour N_2 (on considérera $1 - P_n$).

Exercice 10.

Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $[-1, 1]$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On muni $\mathbb{R}$ de sa valeur absolue en tant que norme et on définit

$$\phi(f) = - \int_{-1}^0 f + \int_0^1 f.$$

1. Montrer que ϕ est continue sur E de norme 2. Pour démontrer l'égalité, on utilisera

$$f_n(t) = -\mathbf{1}_{-1 \leq t \leq -1/n} + nt\mathbf{1}_{-1/n \leq t \leq 1/n} + \mathbf{1}_{1/n \leq t \leq 1-1/n}$$

2. Existe-t-il une fonction f de E de norme 1 telle que $|\phi(f)| = 2$?

Exercice 11.

Si $\|\cdot\|_a$ et $\|\cdot\|_b$ sont deux normes sur $\mathbb{C}^n$, on définit alors une norme sur $M_n(\mathbb{C})$ par

$$\|A\|_a^b = \sup \left\{ \frac{\|AX\|_b}{\|X\|_a} \quad X \neq 0 \right\}.$$

On considère alors $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

1. Démontrer que

$$\|A\|_\infty^\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|.$$

2. Trouver les normes de départ et d'arrivée induisant comme norme

$$\|A\|_a^b = \sup_{i,j} |a_{i,j}| \quad \text{et} \quad \|A\|_a^b = \sup_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|.$$

3. Démontrer que

$$\|A\|_\infty^1 \leq \sum_{i,j} |a_{i,j}|.$$

Y a t il égalité?

4. On considère T l'application de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même défini par

$$T(x, y, z) = (5x - 2y + 2z, 2x - y, x + y + z).$$

- (a) On munit $\mathbb{R}^3$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$, quelle est la norme de T ?
- (b) On munit $\mathbb{R}^3$ de la norme $\|\cdot\|_1$, quelle est la norme de T ?

Exercice 12. Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel normé et K une partie compacte convexe symétrique par rapport à 0 et bornée. On suppose que K contient une boule de centre 0 et on définit

$$\rho_K(x) := \inf \{ \lambda > 0 : x/\lambda \in K \}$$

1. Montrer que ρ_K est bien définie, et que c'est une norme sur E .
2. Montrer que l'intérieur de K , défini comme l'ensemble des points de K privé de sa frontière est

$$K \setminus \partial K = \{x \in E : \rho_K(x) < 1\}.$$

3. Démontrer que l'application ρ_K est sous-additive, c'est-à-dire que

$$\rho_K(x + y) \leq \rho_K(x) + \rho_K(y).$$

On utilisera pour cela un $\epsilon > 0$ et considérera les points

$$\frac{x}{\rho_K(x) + \epsilon} \quad \text{et} \quad \frac{y}{\rho_K(y) + \epsilon}.$$

4. Démontrer que l'application ρ_K est continue.

Exercice 13. Soit E l'espace vectoriel des suites réelles nulles à partir d'un certain rang muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que $L : E \rightarrow E$ définie par

$$L(x) = \left(\frac{x_n}{n+1} \right)_{n \geq 0},$$

est une application linéaire bijective continue. L'application L^{-1} est-elle continue?

Exercice 14.

Soit E un espace vectoriel normé et u et v deux endomorphismes tels que

$$u \circ v - v \circ u = Id_E.$$

1. Démontrer par récurrence que

$$\forall k \geq 1 \quad u^k \circ v - v \circ u^k = ku^{k-1}.$$

2. En déduire que soit u , soit v est discontinue.