Année 2013/2014 UNIVERSITÉ PAUL SABATIER

L3 MMESI INTEGRATION-PROBABILITES 2

TD 4 **Espaces L^p, Intégration**

Exercice 1. Soit f et g deux fonctions mesurables positives sur un espace $(X, \mathcal{T}, \mu)$, qui vérifient $fg \geq 1$. Montrer que $\int_X f d\mu \int_X g d\mu \geq \mu(X)^2$. Que peut on dire d'un espace mesuré $(X, \mathcal{T}, \mu)$, sur lequel on peut trouver une fonction f mesurable, telle que f et $1/f$ sont intégrables?

Exercice 2. Soit f une fonction mesurable sur un espace $(X, \mathcal{T}, \mu)$.. Pour $1 \leq p < \infty$, on pose

$$\phi(p) = \int_X |f|^p \, d\mu$$

et $I = \{p \in [1, +\infty[, \phi(p) < \infty\}$.

1. Montrer que I est un intervalle.
2. Étudier le cas de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}(1+|\log(x)|)}$, $x > 0$,
3. puis de la fonction $x \longmapsto e^{-x}$, $x > 0$.
4. Trouver $f, g \in L^5(\mathbb{R})$ avec $fg \notin L^2(\mathbb{R})$

Exercice 3. Montrer en utilisant l'inégalité de Hölder que, pour tout $a > 0$,

$$\int_0^a x^{-\frac{1}{2}} e^{2x} dx \leq \frac{3}{2} a^{\frac{1}{6}} e^{2a}.$$

Exercice 4. Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré de mesure finie et $f \in L^\infty(X)$. On se propose de démontrer que

$$\lim_{p \to +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty .$$

1. Montrer que, pour tout réel $p \geq 1$, $\|f\|_p \leq \|f\|_\infty (\mu(X))^{\frac{1}{p}}$.
2. Montrer que si $\|f\|_\infty (f) = 0$ alors $f = 0$ μ presque partout.
   Soit donc maintenant f tel que $\|f\|_\infty > 0$.
3. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tel que $0 < \varepsilon < \|f\|_\infty$. On pose
   $$S_\varepsilon = \{x \in X, \quad \|f\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2} \leq |f|(x) \leq \|f\|_\infty\}.$$
   (a) Montrer que S_ε est mesurable, de mesure strictement positive.
   (b) Montrer que, pour tout réel $p \geq 1$,
   $$\|f\|_p \geq \Big(\|f\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2}\Big) \mu(S_\varepsilon)^{\frac{1}{p}}.$$
   (c) En déduire que pour p assez grand, $\|f\|_p \geq \|f\|_\infty - \varepsilon$.
   (d) Conclure.
4. Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace de probabilité et une application $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$, μ-intégrable.
   (a) Montrer que $p \mapsto \|f\|_p$ est croissante sur $]0, +\infty[$, bornée sur $]0, 1]$.
   (b) Montrer que si $\mu(\{f > 0\}) < 1$ alors $\lim_{p \to 0^+} \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = 0$.
   (c) Etablir que $\lim_{p \to 0^+} \int f^p d\mu = \mu(\{f > 0\})$.
   (d) On suppose que $f : X \longrightarrow]0, +\infty[$ est μ-intégrable ainsi que $\ln(f)$.

- En utilisant l'inégalité valable pour tout $p \in]0,1[$ et $x \in]0,+\infty[$:

$$\left|\frac{x^p-1}{p}\right| \leq x + |\ln(x)|$$

prouver que $\lim\limits_{p\to 0^+} \int \frac{f^p-1}{p} d\mu = \int \ln(f) d\mu$.

- Enfin montrer l'aide des résultats précédents que $\lim\limits_{p\to 0^+} \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \exp\left(\int \ln(f) d\mu\right)$

Exercice 5. Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction intégrable. Pour tout entier positif n, on note $f_n : x \longmapsto \min(f(x), n)$.

1. Montrer que pour tout n, $f_n \in L^1(X,\mu)$ et $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^1} f$.

2. En déduire que l'ensemble des fonctions bornés de $L^1(X,\mu)$ est dense dans $L^1(X,\mu)$.

Exercice 6. Soit $p \in]1,+\infty[$ et f une fonction continue bornée de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ appartenant à $L^p([0,+\infty[)$. On pose alors

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt,$$

si $x > 0$ et $F(0) = f(0)$.

1. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $]0,+\infty[$, et pour $x > 0$,

$$xF'(x) = f(x) - F(x).$$

2. On suppose de plus que, dans cette question, f est nulle en dehors du compact $[0,n]$, pour $n \geq 1$.

   - Montrer qu'il existe une constante positive C tel que, pour tout $x > 0$,

   $$|F(x)| \leq \frac{C}{x}.$$

   - On suppose que la fonction f est positive. En remarquant que, pour $x > 0$,

   $$F^p(x) = F^{p-1}(x)f(x) - xF^{p-1}(x)F'(x),$$

   et en utilisant une intgration par partie sur l'intervalle $[\frac{1}{n}, n]$, montrer que

   $$\int_0^\infty F^p(t)dt = \frac{p}{p-1}\int_0^\infty F^{p-1}(t)f(t)dt.$$

   - En déduire l'inégalité

   $$\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p. \tag{1}$$

3. En approchant f par une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ continues, telles que pour tout n, f_n est nulle en dehors du compact $[0, n+\frac{1}{n}]$, montrer que (1) reste valable sans le cas général.

Exercice 7. Soit μ une mesure finie définie sur un espace $(X, \mathcal{A}$ (i.e. $\mu(X) < +\infty$) et $f : X \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction mesurable. On suppose qu'il existe un réel $p > 0$ tel que $f \in \mathcal{L}^q(X)$.

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}^q(X)$ pour tout $q \leq p$.

2. Montrer que $\lim_{q\to 0, q>0} \|f\|_q^q = \mu(X)$ et en déduire que

$$\lim_{q\to 0, q>0} \|f\|_q = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad \mu(X) > 1, \\ 0 & \text{si} \quad \mu(X) < 1. \end{cases}$$

3. Soit $x > 0$, montrer que la fonction $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(q) = \frac{x^q-1}{q}$ est croissante.

4. En déduire que la fonction $(\log f)_+$ où $(a)_+ = \max(a, 0)$ est intégrable et
$$\lim_{q\to 0, q>0} \int_X \frac{f^q - 1}{q} d\mu = \int_X \log f d\mu$$
en posant $\int_X \log(f) d\mu = \int_X (\log(f))_- d\mu \in [-\infty, +\infty[$.

5. Si $\mu(X) = 1$, montrer que
$$\lim_{q\to 0, q>0} \|f\|_q = \exp \int_X \log f d\mu.$$

Exercice 8. On se place sur $\mathbb{R}$ muni de la mesure de Lebesgue. Soient $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Etablir l'inégalité de Young
$$\forall a, b > 0, \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$
et montrer qu'il y a égalité si et seulement si $a^p = b^q$.

2. Soient $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, et f, g deux fonctions mesurables positives telles que f^g et $g^q \leq h$ μ p.p.. Montrer l'égalité
$$\int_X (h - gf) d\mu \geq \left\{ \int_X [h - f^p] d\mu \right\}^{1/p} \left\{ \int_X [h - f^q] d\mu \right\}^{1/q}$$
et qu'il y a égalité si et seulement si $f^p = g^q$ μ p.p.