Année 2014/2015 UNIVERSITÉ TOULOUSE I CAPITOLE

Mise à niveau Maths 1

TD 4 **Espaces complets, espaces de Hilbert**

Exercice 1.

Soit $c_0 := \{(u_n)_{n\geq 1} | \lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 0\}$.

1. Démontrer que c_0 est inclus dans l'ensemble des suites bornées (noté ℓ^∞).
2. Démontrer que c_0 est complet pour la norme $\|.\|_\infty$.

Exercice 2.

L'espace $\mathbb{R}$ muni de la distance

$$d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$$

est-il un espace complet?

Exercice 3.

1. Démontrer que $\mathcal{C}([0, 1])$ est complet pour la topologie induite par la norme uniforme.
2. Démontrer que ce résultat est faux lorsqu'on considère la norme $\|.\|_1$.
3. Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}$ des suites nulles à partir d'un certain rang muni de la norme uniforme n'est pas complet.
4. Trouver un espace métrique complet contenant S comme ensemble dense.

Exercice 4.

On considère une matrice $A = (a_{i,j})_{i,j}$ à coefficients réels non nuls vérifiant

$$\sum_{i,j} a_{i,j}^2 < 1.$$

1. On considère un vecteur quelconque $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Démontrer qu'il existe un unique vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n)$ tels que
$$x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = b_i \qquad 1 \leq i \leq n.$$
2. En déduire que $\det(I - A) \neq 0$.
3. Montrer sous les mêmes hypothèses que le système suivant a une unique solution.
$$x_i - \sum_{j=1}^{n} \sin(a_{i,j} x_j) = b_i \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Exercice 5.

Soit (X, d) un espace métrique complet et f une application de X dans X vérifiant:

$$\forall (x, y) \in X^2 \qquad d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

- L'application f a-t-elle un point fixe? (Indication: considérer $f(x) = x + 1/x$ sur $[1, +\infty)$).
- Montrer que si X est compact, alors f a un point fixe.

Exercice 6.

Soit $X = \mathcal{C}^1([0,1])$ muni de la norme N définie par

$$N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

On considère T l'application

$$T(f) : x \longrightarrow 1 + \int_0^x f(t - t^2).$$

1. Démontrer que $T \circ T$ est contractante.
2. En déduire qu'il existe une unique fonction f vérifiant:

$$\forall x \in [0,1] \qquad f'(x) = f(x - x^2).$$

Exercice 7. Théorème de projection sur un convexe fermé complet d'un espace de Hilbert

On note C un ensemble convexe fermé et complet et H un espace de Hilbert contenant C. On appelle projection de x sur C un point $c_x \in C$ vérifiant

$$(i) \forall y \in C \qquad \|x - c_x\| \leq \|x - y\|$$

1. Démontrer que (i) est équivalente à la condition suivante:

$$(ii) \forall y \in C \qquad \langle x - c_x, y - c_x \rangle \leq 0$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $d = d(x, C)$. Démontrer qu'il existe $c_n \in C$ tel que

$$\|x - c_n\|^2 \leq d^2 + \frac{1}{n}$$

3. Démontrer que $(c_n)_{n \geq 1}$ est une suite de Cauchy.
4. Conclure quand à l'existence du projeté de x.
5. Démontrer que le projeté de x sur C est unique.

Exercice 8. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le sous-espace M_n des suites $(u_k)_{k \geq 0}$ telles que

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = 0$$

1. Démontrer que l'application T définie par

$$T(u) = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

   est linéaire continue de $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ dans $\mathbb{R}$. Que peut on en déduire sur M_n.

2. Démontrer que

$$\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}) = M_n \bigoplus M_n^\perp$$

3. Soit E l'ensemble des suites $(y_k)_{k \geq 0}$ vérifiant:

$$\forall k \in [0, n] \qquad y_k = y_0 \qquad \text{et} \qquad \forall k \geq n+1 : y_k = 0.$$

   Démontrer que E est dans $M_n^\perp$.

4. Démontrer qu'en réalité il y a égalité des deux ensembles. On considérera la suite x vérifiant pour un certain couple $(i,j) \in [0,n]^2$
$$x_i = 1 \quad x_j = -1 \quad x_k = 0 \quad \forall k \geq n+1.$$

Exercice 9.

Soit H un espace de Hilbert. Donner la formule de projection sur la boule unité fermée de H.

Exercice 10. Polynômes de Legendre Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme P_n par

$$P_n(t) = \frac{d^n \left\{(t^2-1)^n\right\}}{dt^n}$$

1. Quel est le degré de P_n?
2. Montrer que les P_n sont orthogonaux dans $L^2([-1,1])$.
3. On pose
$$L_n = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^{n+1/2}n!}P_n.$$
Démontrer que les (L_n) forment une base orthonormale de $L^2([-1,1])$.

Exercice 11. Polynômes de Tchebychev

1. Démontrer que pour tout n, il existe un unique polynôme T_n vérifiant
$$T_n(\cos x) = \cos(nx) \forall x \in \mathbb{R}.$$
2. Quel est le degré de T_n?
3. Soit μ la mesure positive sur $[-1,1]$ dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue est
$$d\mu(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$$
Démontrer que μ est finie sur $[-1,1]$ et calculer le volume de $[-1,1]$.
4. Montrer que
$$\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right\} \cup \left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}T_n, n \geq 1\right\},$$
forme une base orthonormée de $L^2(\mu)$.