L3 MMESI INTEGRATION-PROBABILITES 2

TD 5 **Espérance conditionnelle**

Exercice 1. Une maladie affecte une personne sur 1000 dans une population donnée. On dispose d'un test sanguin qui détecte la maladie avec une fiabilité de 99% lorsque cette maladie est effectivement présente. Cependant, on obtient un résultat faussement positif pour 0.2% des personnes saines. Quelle est la probabilité qu'une personne soit réellement malade lorsque son test est positif?

Exercice 2. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètre λ_1 et λ_2.

1. Quelle est la loi de X_1 sachant $X_1 + X_2$.
2. Calculer $\mathbb{E}(X_1|X_1 + X_2)$.

Exercice 3. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Déterminer la loi du couple $(X, X+Y)$. En déduire la loi conditionnelle de X sachant $X+Y$.

Exercice 4. Soit (X_i) une suite de v.a.r. indépendantes équidistribuées de carré intégrables de moyenne μ, de variance σ^2. Soit N une v.a. à valeurs entières de carré intégrable de moyenne m, de variance a.

1. Montrer que $\mathbb{E}(S_N|N = n) = \mathbb{E}(S_n)$.
2. En déduire $\mathbb{E}(S_N)$ et $Var(S_N)$.

Exercice 5. Les v.a. X_1 et X_2 modélisant le résultat de deux jets de dés indépendants, S étant leur somme, quelle est la loi de X_1 sachant que S est paire ?

Exercice 6. Soient $(X_1, \ldots, X_n)$ des réalisations i.i.d. de variables aléatoires de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. On note $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

1. Quelle est la loi de S_n?
2. Quelle est la loi du couple (X_1, S_n)?
3. Quelle est la loi conditionnelle de X_1 sachant S_n?
4. Quelle est la loi conditionnelle de S_n sachant X_1?

Exercice 7. Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Déterminer la loi du couple $(X, Z) = (X, X^2 + Y^2)$.
2. En déduire la loi de $X^2 + Y^2$ puis la loi conditionnelle de X sachant $X^2 + Y^2$.
3. Calculer
$$\mathbb{E}\left[|X|\,|X^2 + Y^2\right].$$
4. On note $R = \sqrt{Z}$ et on définit θ par
$$X = R\cos\theta \quad Y = R\sin\theta.$$
Rappeler la loi de $(R, \theta$, et retrouver alors les résultats de la question précédente.

Exercice 8. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles telles que
$$f_X(x) = \frac{2\log(1+x)}{(\log 2)^2(1+x)}\mathbf{1}_{0<x<1},$$
et pour tout $x \in]0,1[$,
$$f_Y(y|X = x) = \frac{1}{(1+y)\log(1+x)}\mathbf{1}_{0<y<x}.$$

1. Les variables X et Y sont elles indépendantes ?
2. Déterminer la loi de Y.
3. Déterminer la loi de X sachant Y.
4. Déterminer $\mathbb{E}(Y|X)$.

Exercice 9. Soit X et Y un couple de variables aléatoires réelles telle que

- la loi de Y est une loi de bernoulli de paramètre p,
- La loi de X sachant $Y = 0$ soit une loi gaussienne $\mathcal{N}(0, \sigma_0^2)$,
- La loi de X sachant $Y = 1$ soit une loi gaussienne $\mathcal{N}(0, \sigma_1^2)$,

1. Montrer que la loi de X admet une densité que l'on calculera.
2. Calculer la loi de Y sachant X.
3. Calculer $\mathbb{E}(Y|X)$.

Exercice 10. Soit X et Y un couple de variables aléatoires réelles tel que

- (i) $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k) = 2^{-k}$,
- (ii) $\forall k \in \mathbb{N}^*, f_Y(y|X = k) = k(1 - y)^{k-1}\mathbf{1}_{0<y<1}$.

1. Quelle est la loi de Y?
2. Quelle est la loi de X sachant Y?
3. Déterminer $\mathbb{E}(XY)$.