Année 2013/2014 UNIVERSITÉ PAUL SABATIER

L3 MMESI INTEGRATION-PROBABILITES 2

TD 6 **Convergence de variables aléatoires**

Exercice 1. Soit (X_n) une suite de v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

1. Montrer la convergence en probabilité suivante:

$$\frac{1}{\log n} \max_{1 \leq k \leq n} X_k \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{1}{\lambda}.$$

2. Soit Z_n la variable aléatoire

$$Z_n := \max_{1 \leq k \leq n} X_k - \frac{\log n}{\lambda}.$$

Démontrer que Z_n converge en loi vers une limite à déterminer.

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ et X une autre v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Montrer que si X_n converge en loi vers X, alors

$$\lim_n \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k), \forall k \in \mathbb{N}.$$

2. Prouver la réciproque.
3. Soit $\lambda > 0$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. de loi Binomiale $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$. Étudier la convergence en loi de X_n.

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. de loi uniforme sur $[0, 1]$ et indépendantes. On pose

$$Z_n = n \min_{1 \leq i \leq n} X_i.$$

Montrer que la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers une limite à déterminer.

Exercice 4. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose

$$Y = \limsup \frac{X_n}{\log n}.$$

1. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\limsup \left\{\frac{X_n}{\log n} \geq \frac{1}{\lambda}\right\}\right) \leq \mathbb{P}\left(\limsup \frac{X_n}{\log n} \geq \frac{1}{\lambda}\right)$$

2. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\limsup \left\{\frac{X_n}{\log n} \geq \frac{1}{\lambda}\right\}\right) = 1.$$

En déduire que $\mathbb{P}(Y \geq \lambda^{-1}) = 1$.

3. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$:

$$\mathbb{P}\left(\limsup \frac{X_n}{\log n} > \frac{1+\epsilon}{\lambda}\right) \mathbb{P}\left(\limsup \left\{\frac{X_n}{\log n} > \frac{1+\epsilon}{\lambda}\right\}\right) \leq$$

4. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\limsup \left\{\frac{X_n}{\log n} > \frac{1+\epsilon}{\lambda}\right\}\right) = 0.$$

5. En déduire que $\mathbb{P}(Y = \lambda^{-1}) = 1$

6. Montrer que $X_n/\log(n)$ converge vers 0 en probabilité. Cette suite converge-t-elle presque sûrement vers 0?

Exercice 5. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre p. On note

$$Y_n = U_n U_{n+1},$$

puis

$$S_n = Y_1 + \ldots + Y_n$$

1. Pour tout n, quelle est la loi de Y_n?
2. À quelle condition sur n et m les variables aléatoires Y_n et Y_m sont elles indépendantes?
3. Calculer
$$\mathbb{E}(Y_n Y_m).$$
4. Calculer
$$\mathbb{E}\frac{S_n}{n}$$
5. Montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout n:
$$Var(S_n) \leq Cn$$
6. Démontrer qu'alors la suite S_n/n converge en probabilité vers une constante à préciser.

Exercice 6. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{E}(\lambda)$ et $\mathcal{E}(\mu)$, avec $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. On note $Z = X \wedge Y$.

1. Calculer la fonction de répartition de Z.
2. Calculer $\mathbb{P}(X \leq Y)$.
3. Montrer que les variables Z et $\mathbf{1}_{Z=X}$ sont indépendantes.
4. On suppose désormais que $X \sim \mathcal{G}(p)$ et $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$ avec $p \in]0,1[$ et $\lambda > 0$. Calculer les fonctions de répartition de X et Y.
5. Calculer $\mathbb{P}(X \leq Y)$.
6. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}(Z = k)$.
7. Pour $\ell \in \mathbb{N}$, et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\ell < a < b < \ell + 1$, calculer alors
$$\mathbb{P}(a < Z < b).$$

Exercice 7. Soient $X_0, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Soit N une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, indépendante des $(X_i)_{0\leq i\leq n}$. On pose

$$U = \sum_{i=0}^{N} X_i.$$

1. Exprimer la fonction caractéristique de U en fonction de celle de X_0.
2. On suppose que les X_i suivent une loi de Bernoulli de paramètre p et N une loi de Poisson de paramètre λ. Calculer alors la fonction génériice de V donnée par
$$V = \sum_{i=1}^{N} X_i \qquad \text{si} \qquad N > 0 \qquad \text{et} \quad V = 0 \qquad \text{sinon.}$$

Exercice 8. La durée de vie d'une ampoule électrique peut-être modélisée par une variable aléatoire X prenant au hasard ses valeurs dans l'intervalle $[0, \theta]$ avec $\theta > 0$. Afin d'optimiser l'agenda d'un opérateur, on cherche à estimer θ à partir d'un n échantillon $(X_1, ..., X_n)$ de même loi que X. On se propose d'estimer θ par

$$\hat{\theta}_n = \max_{1 \leq k \leq n} X_k.$$

1. Calculer la fonction de répartition de $\hat{\theta}_n$ puis la densité de probabilité de $\hat{\theta}_n$.
2. Montrer que $\hat{\theta}_n$ converge presque sûrement vers θ lorsque n tend vers plus l'infini.
3. Soit $t > 0$, calculer, en fonction de t, n et de θ, la probabilité $\mathbb{P}(n(\theta - \hat{\theta}_n)) > t)$.
4. En déduire la loi limite de $n(\theta - \hat{\theta}_n)$ lorsque n tend vers plus l'infini.
5. Comparer l'estimateur $\hat{\theta}_n$ à l'estimateur $\tilde{\theta}_n = 2\overline{X}_n$. (On pourra étudier le biais, la convergence, le risque quadratique et la vitesse de convergence de chaque estimateur.)