Année 2013/2014 UNIVERSITÉ PAUL SABATIER

L3 MMESI INTEGRATION-PROBABILITES 2

TD 7 **Théorèmes Limites**

Exercice 1. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que la suite de terme général

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 e^{X_i}$$

converge presque sûrement vers une limite que l'on précisera.

Exercice 2. Soit (Y_n) et (Z_n) des variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[0,1]$. Déterminer le comportement lorsque n tend vers l'infini du

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{Y_i+Z_i\leq 1}$$

Exercice 3. Soient $(X_1,\ldots,X_n)$ des variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$. On pose

$$\bar{X}_n = \frac{X_1+\ldots+X_n}{n} \qquad \text{et} \qquad Z_n = \frac{1}{\bar{X}_n}.$$

1. Montrer que Z_n converge presque sûrement vers λ lorsque n tend vers $+\infty$.
2. En supposant n suffisamment grand pour que cela se justifie, par quelle loi gaussienne peut-on approcher la loi de $\bar{X}_n$?
3. Soit N une v.a. $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer qu'il existe un unique ϕ tel que
$$\mathbb{P}(|N|<\phi)=0.95.$$
4. En déduire un intervalle de la forme
$$I=[\lambda^{-1}-\beta;\lambda^{-1}+\beta],$$
avec β à déterminer tel que $\mathbb{P}(\bar{X}_n\in I)=0.95$).
5. En déduire un intervalle J tel que
$$\mathbb{P}(Z_n\in J)=0.95.$$
6. Calculer J en fonction de λ pour $n=10^4$ et $\phi=1.96$.

Exercice 4. Déterminer la limite suivante:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{e^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}$$

Exercice 5. Étant donné une loi de probabilité μ, tout réel λ vérifiant

$$\mu(]-\infty,\lambda])=\mu([\lambda,+\infty[)=1/2,$$

est appelé une médiane de μ.

1. Démontrer que si μ est une mesure à densité f continue et strictement positive par rapport à la mesure Lebesgue, alors la médiane λ est unique.
2. On considère une suite de v.a. i.i.d. $X_1,\ldots,X_{2n+1}$. Donner la valeur de la médiane M_n de l'échantillon.
3. Écrire la densité de la médiane empirique.

4. Démontrer la normalité asymptotique, c'est-à-dire:

$$Z_n := \sqrt{2n+1}(M_n - \lambda) \underset{n\longrightarrow\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{4f^2(\lambda)}\right)$$

5. Que penser du cas de la médiane pour la loi de Cauchy

$$p_\theta(x) = \frac{1}{\pi(1+(x-\theta)^2}.$$

Comparer avec la moyenne empirique.

Exercice 6. Soient X, Y deux variables aléatoires i.i.d. de même loi et de variance σ^2. On suppose que $(X+Y)/\sqrt{2}$ est de même loi que X et Y. Que dire de cette loi commune?