

Opérations sur les Matrices

Exercice 1 : Soit M la matrice définie par

$$M = \begin{pmatrix} a+b & b & b \\ b & a+b & b \\ b & b & a+b \end{pmatrix}$$

1. Calculer M^2 en fonction de M et I .
2. Discuter de l'inversibilité de M en fonction de a et b . Déterminer l'inverse le cas échéant.

Exercice 2 : On définit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 et A^3 . En déduire A^n pour tout entier n .
2. A est-elle inversible ?

Exercice 3 : On définit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. On pose $B = A - I_4$. Calculer B^2 et B^k pour tout entier k .
2. En déduire A^n pour tout entier n .
3. Calculer $2A^n + nB^2 - (nB + I_4)^2$.

Exercice 4 : Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Trouver un réel x tel que : $B = A + xI_3$.
2. Trouver une relation entre B et B^2 , et en déduire une égalité reliant A , A^2 et I_3 .
3. En déduire que A est inversible et donner A^{-1} (sans appliquer la méthode du pivot de Gauss).

Exercice 5 : Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. En calculant $M^3 - 3M^2 + 3M$, démontrer que M est inversible.

2. Exprimer M^{-1} en fonction de M et I_3 .

Exercice 6 : Etudier si les matrices suivantes sont inversibles. Lorsque c'est possible, calculer leur inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ -1 & 1 & i \\ i & -i & 1 \end{pmatrix}, M_x = \begin{pmatrix} 1 & 1+x & -x \\ 0 & x & 1-2x \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}.$$

Exercice 7 : On considère deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ définies par leur premier terme : x_0 et y_0 , et la relation de récurrence $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n \\ y_{n+1} = y_n \end{cases}$

1. Écrire le système sous forme matricielle $V_{n+1} = BV_n$ où $V_n = [x_n, y_n]^t$.
2. Montrer, en justifiant précisément, que $V_n = B^n V_0$ pour tout $n \geq 1$.
3. Déterminer B^n et exprimer $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ en fonction de x_0 et y_0 .

Exercice 8 : On considère trois suites $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ et $(z_n)_n$ définies par leur premier terme : x_0 , y_0 et z_0 , et la relation de récurrence

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 3y_n \\ y_{n+1} = y_n + 2z_n \\ z_{n+1} = z_n \end{cases}$$

1. Écrire le système sous forme matricielle $V_{n+1} = AV_n$ où $V_n = [x_n, y_n, z_n]^t$.
2. Montrer, en justifiant précisément, que $V_n = A^n V_0$.
3. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3n & 3n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
4. Exprimer $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ et $(z_n)_n$ en fonction de x_0 , y_0 et z_0 .

Exercice 9 : (*) Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \alpha^2 \\ 1/\alpha & 0 & \alpha \\ 1/\alpha^2 & 1/\alpha & 0 \end{bmatrix}$.

1. Calculer $(A + I_3)(2I_3 - A)$.
2. A est-elle inversible ? Si oui calculer son inverse en utilisant la définition.
3. On pose $B = \frac{1}{3}(A + I_3)$, $C = \frac{1}{3}(2I_3 - A)$. Démontrer $B + C = I_3$, $2B - C = A$, $B^2 = B$, et $C^2 = C$.
4. Calculer BC et CB .
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $A^n = 2^n B + (-1)^n C$. En déduire A^n .
6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $A^{-n} = (A^{-1})^n$. Exprimer A^{-n} en fonction de B et C .
7. En déduire l'expression de A^k pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 10 : (*) Soient les matrices $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} a & b & b \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{bmatrix}$.

Déterminer les matrices A^n , B^n et C^n , pour tout $n \in \mathbb{N}$ (si possible, pour $n \in \mathbb{Z}$)

Indication : Mettre les matrices sous la forme $\alpha J + \beta I$ (où I est la matrice unité).