

Espaces vectoriels

Exercice 1 : Lesquels de ces ensembles sont des espaces vectoriels ?

1. $\mathcal{V}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = 0\}$
2. $\mathcal{V}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = -1\}$
3. $\mathcal{V}_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, 3x - y + t = 0\}$
4. $\mathcal{V}_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, -x + y + 2t = 1\}$
5. $\mathcal{V}_4 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y = 0 \text{ et } 2x + y - z = 0\}$
6. $\mathcal{V}_5 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.
7. $\mathcal{V}_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z(x^2 + y^2) = 0\}$.
8. $\mathcal{V}_7 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 - z^2 = 0\}$

Exercice 2 : 1. Montrer que le vecteur $v = (1, -2, 5)$ est une combinaison linéaire des vecteurs $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 2, 3)$ et $e_3 = (2, -1, 1)$.

2. Ecrire le polynôme $P(t) = t^2 + 4t - 3$ comme combinaison linéaire des polynômes $e_1 = 1$, $e_2 = t - 1$ et $e_3 = (t - 1)^2$.

Exercice 3 : Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels.

1. E_1 l'ensemble des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.
2. E_2 l'ensemble des suites réelles convergentes vers 0.
3. E_3 l'ensemble des polynômes réels de degré inférieur à n .

Exercice 4 : Montrer que les ensembles $U = \{(a, a, a) \in \mathbb{R}^3, a \in \mathbb{R}\}$ et $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + 3z = 0 \in \mathbb{R}\}$ sont des s.e.v. de $\mathbb{R}^3$. Démontrer que

$$U \oplus V = \mathbb{R}^3.$$

Exercice 5 : Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on définit les ensembles :

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{et} \quad E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Démontrer que $E_1 \oplus E_2 = E$.

Exercice 6 : Soit E un espace vectoriel et F, G deux sous espaces vectoriels de E . Montrer que $F \cup G$ est un sous espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 7 : Déterminer si les applications suivantes sont linéaires.

1. $f_1(x, y) = (2x + y, x - y)$.
2. $f_2(x, y, z) = (xy, x, y)$.
3. $f_3(x, y, z) = (2x + y + z, y - z, x + y)$.

4. $f_4(P) = P'$ où $P \in \mathbb{R}[X]$.
5. $f_5(P) = (P(-1), P(0), P(1))$.
6. $f_6(P) = P - (X - 2)P'$.

Exercice 8 : Donner des exemples d'applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ vérifiant

1. $\ker f = \text{Im}(f)$.
2. $\ker f \subset \text{Im}(f)$ (inclusion stricte).
3. $\text{Im}(f) \subset \ker(f)$ (inclusion stricte).

Exercice 9 : Soit E un espace vectoriel engendré par (e_1, e_2, e_3) et t un paramètre réel. On définit ϕ par

$$\phi(e_1) = e_1 + e_2 \quad \phi(e_2) = e_1 - e_2 \quad \phi(e_3) = e_1 + te_3.$$

Écrire $\phi(xe_1 + ye_2 + ze_3)$. Comment choisir t pour que ϕ soit injective, soit surjective ?

Exercice 10 : Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré exactement n . On définit

$$f(P) = P + (1 - X)P'.$$

Montrer que f est une application linéaire. Décrire $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$. Donner une base de chacun de ces espaces.

Exercice 11 : Soit E un espace vectoriel et f une application linéaire de E vérifiant $f \circ f = \text{Id}_E$.

1. On pose $E_1 = \ker(f - \text{Id}_E)$ et $E_2 = \ker(f + \text{Id}_E)$. Soit $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$. Calculer $f(x_1)$ et $f(x_2)$.
2. En décomposant x en $(x + f(x))/2 + (x - f(x))/2$, démontrer que

$$E_1 \oplus E_2 = E.$$

3. On suppose que E est de dimension finie, engendré par une base de E_1 (de cardinal r) concaténée à une base de E_2 (d cardinal $n - r$). Calculer une matrice de f dans la base de E ainsi obtenue.