Université Toulouse I
Licence 1, second semestre **Feuille n° 5**
Algèbre 2

Espaces Vectoriels - Familles Libres - Familles Génératrices - Base

---

Définitions familles libres, familles génératrices de vecteurs.
Définition :[**Famille libre**] Une famille de vecteurs $(v_1, \dots, v_n)$ d'un espace vectoriel E est libre ssi

$$\forall(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0 \Longleftrightarrow \lambda_i = 0, \forall i \in \{1 \dots, n\}.$$

Définition :[**Famille liée**] Une famille de vecteurs $(v_1, \dots, v_n)$ d'un espace vectoriel E est liée ssi elle n'est pas libre.
Définition :[**Famille génératrice**] Une famille de vecteurs $(v_1, \dots, v_n)$ d'un espace vectoriel E est génératrice ssi elle

$$\forall u \in E \qquad \exists(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \qquad u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i.$$

Définition :[**Base d'un espace vectoriel**] Une famille de vecteur $(v_1, \dots, v_n)$ d'un espace vectoriel E est une base ssi la famille est libre et génératrice.
Définition :[**Dimension d'un espace vectoriel**] E est de dimension finie n si il existe une base de E composée de n vecteurs.

Exercice 1 : On se place dans $\mathbb{R}^2$. On note $u = (1, 3)$ et $v = (2, -2)$.

1. Vérifier que le vecteur $w = (10, -2)$ est une combinaison linéaire de u et v.
2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que (a, b) soit une combinaison linéaire de u et v.
3. Déterminer $F =< u, v >$.

Exercice 2 : Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $\vec{v_1} = (1, 0, 1)$, $\vec{v_2} = (0, 2, 2)$ et $\vec{v_3} = (3, 7, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. $\vec{v_1} = (1, 0, 0)$, $\vec{v_2} = (0, 1, 1)$ et $\vec{v_3} = (1, 1, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. $\vec{v_1} = (1, 2, 1, 2)$, $\vec{v_2} = (2, 1, 2, 1)$, $\vec{v_3} = (1, 0, 1, 1)$ et $\vec{v_4} = (0, 1, 0, 0)$ dans $\mathbb{R}^4$.
4. $u = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, dans $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.
5. $u = 2 - 5X + 6X^2 - X^3$, $v = 3 + 2X - 4X^2 + 5X^3$, dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 3 : On considère la famille (u, v) où $u = (1, 1)$ et $v = (1, 2)$. Montrer que (u, v) est une base de $\mathbb{R}^2$ et calculer les coordonnées de $w = (3, 4)$ dans cette base.

Exercice 4 : Montrer que les vecteurs $u = (1, 2, 3)$, $v = (0, 1, 2)$ et $w = (0, 0, 1)$ engendrent $\mathbb{R}^3$. En déduire qu'ils forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5 : Soit l'ensemble $\mathcal{V}_4 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y = 0 \text{ et } x + 3y - 2z = 0\}$. Montrer que $\mathcal{V}_4$ est un espace vectoriel. Trouver une famille génératrice de $\mathcal{V}_4$.

Exercice 6 : Trouver à quelles conditions sur a, b et c le vecteur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ appartient à l'espace engendré par $u = (2, 1, 0)$, $v = (1, -1, 2)$ et $w = (0, 3, -4)$.

Exercice 7 : Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(1, -1, -2)$ et $(2, 3, -1)$ et soit G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(3, 7, 0)$ et $(5, 0, -7)$. Montrer que $F = G$.

Exercice 8 : Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les familles de vecteurs suivantes :

a) $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 2, -1)$, $v_3 = (1, 0, -2, 3)$,$v_4 = (2, 1, 0, -1)$, $v_5 = (4, 3, 2, 1)$.

b) $v_1 = (1, 2, 3, 4)$, $v_2 = (0, 1, 2, -1)$, $v_3 = (3, 4, 5, 16)$.

c) $v_1 = (1, 2, 3, 4)$, $v_2 = (0, 1, 2, -1)$, $v_3 = (2, 1, 0, 11)$, $v_4 = (3, 4, 5, 14)$.

Ces vecteurs forment-ils :

1. Une famille libre ? Si oui, la **compléter** pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$. Si non donner des relations de dépendance entre eux et en extraire au moins une famille libre.
2. Une famille génératrice ? Si oui, en **extraire** au moins une base de l'espace. Si non, donner la dimension du sous-espace qu'ils engendrent.

Exercice 9 : On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$u_1 = (1, 0, 1, -1), u_2 = (2, 1, 2, 1), u_3 = (3, 1, 2, 0)$$

et on note F le sous-espace vectoriel engendré par ces trois vecteurs. Puis soit G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par

$$v_1 = (1, 1, 3, -1), v_2 = (2, -1, -4, 4)$$

1. Trouver une base de F et donner sa dimension.
2. Faire de même avec G.
3. Déterminer une base de l'espace vectoriel $F + G$.
4. Déterminer une base de $F \cap G$.

Exercice 10 : Soient $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y + z + t = 0\}$ et $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y = z + t\}$. Déterminer $\dim E, \dim F, \dim(E + F), \dim(E \cap F)$.

Exercice 11 : Soit $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{F} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), MD = DM\}$.

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.
2. Trouver une base de $\mathcal{F}$ et donner sa dimension.

Exercice 12 : Soit V l'espace des matrices 2×2 sur $\mathbb{R}$ et soit W le sous-espace engendré par :

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trouver une base et la dimension de W.

Exercice 13 : Soient P_0, P_1, P_2 et $P_3 \in \mathbb{R}_2[X]$ définis par

$$P_0(X) = \frac{(X-1)(X-2)}{2}, \quad P_1(X) = \frac{X(X-1)}{2},$$

$$P_2(X) = 2X(X-2), \quad P_3(X) = \frac{(X-1)(X-3)}{3}.$$

Exprimer $1, X, X^2$ en fonction de P_0, P_1 et P_2. On note $F = vect(P_0, P_1)$ et $G = vect(P_2, P_3)$. Calculer $\dim F$, $\dim G$, $\dim(F+G)$ et $\dim(F \cap G)$. Vérifier que

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$