Université Toulouse I
Licence 1, second semestre **Feuille n° 6**
Algèbre 2

Endomorphismes

Exercice 1 : Montrer que les applications suivantes sont linéaires et déterminer noyau et image:

1. $\left\{ \begin{array}{lcl} f : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-y+z, x+y-z) \end{array} \right.$
2. $\left\{ \begin{array}{lcl} g : \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \mapsto & (x-2y+z+3t, x+y-2z, t-4z) \end{array} \right.$

   Écrire la matrice de f et de g dans la base canonique.

Exercice 2 : Soit les vecteurs colonnes (on identifie dans cet exercice $\mathbb{R}^3$ avec l'ensemble des vecteurs colonnes à trois composantes)

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $\{u, v, w\}$ est une base de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.
2. Donner les coordonnées de la base canonique e_1, e_2, e_3 de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ dans la base $\mathcal{B} = \{u, v, w\}$.
3. Soit f un endomorphisme de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ donné par

$$\begin{array}{lcl} f(e_1) & = & e_1 + 2e_2 + 3e_3 \\ f(e_2) & = & e_2 \\ f(e_3) & = & 2e_2 + 3e_3. \end{array}$$

   Donner la matrice de l'endomorphisme dans la base canonique et dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 3 : On considère les sous espaces vectoriels de $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ suivants:

$$\begin{array}{lcl} F & = & \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+0, y+z=0\}, \\ G & = & \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : y=0, t-z=0\}. \end{array}$$

1. Montrer que $F \cap G = \{0\}$.
2. Démonter que $F \oplus G = \mathbb{R}^4$. En déduire une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ formée des vecteurs de F et de G.
3. On définit p, la projection sur F parallèlement à G, par l'unique endomorphisme vérifiant

$$\begin{array}{lclc} p(v) & = & v & \forall v \in F, \\ p(w) & = & 0 & \forall w \in G. \end{array}$$

Justifier pourquoi ces deux relations permettent de définir un unique endomorphisme. On définit s, la symétrie par rapport à F parallèlement à G, par

$$s = -id_4 + 2p$$

Écrire la matrice de p et s dans la base $\mathcal{B}$.

4. Écrire la matrice de p et s dans la base canonique.

Exercice 4 : Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f un endomorphisme. Démontrer: si pour tout $v \in E$ les vecteurs v et $f(v)$ sont liés alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$f = \lambda \, id_E.$$

Exercice 5 : Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E. On définit l'application linéaire $g : E \to E$ en posant pour tout $i = 1, \ldots, n$

$$g(e_i) = \begin{cases} e_i + e_{i+1} & \text{si } 1 < i < n \\ e_i & \text{si } i = n. \end{cases}$$

On définit par $\mathcal{F}$ l'ensemble des endomorphismes de E tels que

$$f \circ g = g \circ f.$$

1. Écrire $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(g)$, *i.e.* la matrice de g dans la base $\mathcal{E}$.
2. Montrer que pour $n = 1$: $\mathcal{F}$ contient tous les endomorphismes de E.
3. Pour regarder le cas $n = 2$: caractériser toutes les matrices $B \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ telles que

$$AB = BA.$$

Utiliser cette caractérisation pour décrire $\mathcal{F}$.

Exercice 6 : Soit

$$\begin{array}{rcl} \psi : \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & \psi(P) = 2XP - (X^2+1)P' \end{array}$$

1. Montrer que ψ est bien définie et que ψ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer le noyau et l'image de ψ.
3. Écrire la matrice de ψ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Soient $P_0,\ P_1,\ P_2$ les polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ définis par

$$P_1(X) = (X-1)(X-2), \quad P_2(X) = X(X-2), \quad P_3(X) = X(X-3).$$

Montrer que $\mathrm{Vect}\{P_1, P_2, P_3\} = \mathbb{R}_2[X]$.

5. Écrire la matrice de ψ dans la base $\{P_1, P_2, P_3\}$.