Cours/TD/TP- Agrégation externe de mathématiques - 2007/2008
Algorithmes stochastiques, approximation de Robbins Monro, Applications

Références :
- Algorithmes stochastiques (M. Duflo) Springer (1996).
- Random Iterative Models (M. Duflo) Springer (1997).
- Algorithmes adaptatifs et approximation stochastiques (A. Benvéniste, M. Métivier, P. Priouret). Masson (1987).
-

1 Introduction

1.1 Cadre

Les algorithmes stochastiques sont relativement ancien. L'objectif à chaque fois mené dans ces algorithmes est la substitution dans une méthode classique (descente de gradient, différentiabilité, méthode de Monte-Carlo) un calcul d'une intégrale par une méthode itérative et adaptative qui simule la loi de probabilités sous l'intégrale. On évite ainsi les calculs importants lors de certaines approximations d'intégrales. Différents exemples seront donnés ci-après.

Dans ce texte, nous traiterons des algorithmes itératives de Robbins-Monro, ce ne sont pas les seuls algorithmes stochastiques existants puisque de nombreuses autres méthodes ont été développées et méritent tout autant une telle dénomination (Recuit Simulé, Algorithme EM, Algorithmes Génétiques, ...)

1.2 Schéma type des algorithmes de Robbins et Monro

Étant donnée une fonction J définie par

$$J(u) = \int_{\Omega} j(u,\omega)d\mathbb{P}(\omega), \tag{1}$$

on cherche à minimiser J. Le numéricien proposera classiquement la méthode suivante

$$\frac{du_t}{dt} = -\nabla J(u_t).$$

Parfois, le calcul de $\nabla J(u)$ n'est pas explicite et une telle équation d'évolution est impossible à résoudre, tant explicitement que numériquement.

Le statisticien propose alors fréquemment un algorithme du type

$$u_{k+1} = u_k - \alpha_{k+1} f(u_k, \omega_{k+1}) + o(\alpha_k). \tag{2}$$

Dans l'expression précédente, α_k est une suite de pas lentement décroissante, ω_k une variable aléatoire de loi indépendante des $\omega_j, j \neq k$ et f une fonction bien choisie. Sous certaines conditions, le schéma (2) converge presque sûrement vers l'optimum de (1).

Exercice

Écrire l'estimateur de la moyenne empirique sous la forme d'un algorithme stochastique (2). Identifier f, J, $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et illustrer la convergence de l'estimateur.

2 Convergence du gradient stochastique en moyenne quadratique

On souhaite minimiser la fonction J définie dans (1) dans le domaine U convexe fermé. On définit la suite (u_k) par

$$u_{k+1} = \Pi_U \left[u_k - \alpha_{k+1} j'(u_k, \omega_{k+1})\right]$$

où $j'(u,\omega)$ désigne la dérivée en u de j alors que Π_U désigne la projection L^2 sur U. Enfin, les variables $(\omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont toutes i.i.d. de loi $\mathbb{P}$.

Hypothèses :
H1 j est mesurable d'espérance finie.
H2 $j(.,\omega)$ est convexe, continue et différentiable, pour tout $\omega \in \Omega$.
H3 $\nabla j(.,\omega)$ est borné uniformément :

$$\forall u \in U \quad \forall \omega \in \Omega \qquad \|\nabla j(u,\omega)\| \leq m.$$

H4 La fonctionnelle J vérifie

$$U^* = \arg\min_U J \neq \emptyset \qquad \text{et} \qquad \exists c > 0 \quad \forall u \in U \qquad J(u) - J(U^*) \geq c\|u - U^*\|^2.$$

H5 La suite de pas vérifie

$$\sum \alpha_k = \infty \qquad \text{et} \qquad \sum \alpha_k^2 = \infty.$$

Exercice

1. On définit $d_k = d(u_k, U^*)^2$, démontrer que
$$\mathbb{E}\left[d_{k+1}|\mathcal{F}_k\right] \leq (1 - 2\alpha_k c) d_k + \alpha_k^2 m^2.$$
2. Montrer que $\displaystyle\prod_{i=1}^{k}(1 - 2\alpha_k c)$ converge.
3. En déduire que u_k converge en moyenne quadratique.

3 Convergende des algorithmes de Robbins Monro

On étudie désormais un cadre un peu plus général d'algorithmes définis par

$$X_{k+1} = X_k + \alpha_k Y_{k+1} \tag{3}$$

où Y vérifie

$$\mathbb{E}\left[Y_{k+1}|\mathcal{F}_k\right] = f(X_k) \tag{4}$$

et

$$\mathbb{E}\left\|Y_{k+1} - f(X_k)\right\|^2 \leq \sigma^2.$$

Enfin, on fait les hypothèses :
– f est nulle en x^*.
– f vérifie

$$\langle f(x), x - x^* \rangle < 0$$

$$\sum \alpha_k = \infty \qquad \text{et} \qquad \sum \alpha_k^2 = \infty.$$

On va alors démontrer que sous ces hypothèses, l'algorithme (3) converge presque sûrement vers x^*.

Exercice

1. On définit $V_n = \|X_n - x^*\|^2$, montrer qu'on peut trouver K_1 et K_2 tels que :

$$\mathbb{E}\left[V_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] \leq V_n(1 + K_1\alpha_n^2) + \alpha_n^2 K_1 + 2\alpha_n \langle X_n - x^*, f(X_n)\rangle = V_n(1+\beta_n) + \chi_n - \eta_n.$$

2. Remarquer que les 3 suites introduites dans la question précédente sont positives et que

$$\sum \beta_n < \infty \qquad \text{et} \qquad \sum \chi_n < \infty.$$

3. On pose $p_n = \prod_{i=1}^{n}(1+\beta_i)^{-1}$ et on définit les variables aléatoires

$$V_n' = p_{n-1}V_n \qquad \chi_n' = p_n\chi_n \qquad \eta_n' = p_n\eta_n.$$

   Majorer $\mathbb{E}\left[V_{n+1}'|\mathcal{F}_n\right]$.
4. En déduire une super-martingale positive à partir de V_n', χ_n et η_n.
5. Conclure que V_n converge presque sûrement vers V_∞, ainsi que $\sum \eta_n$.
6. En raisonnant par l'absurde, montrer qu'en réalité V converge presque sûrement vers 0.

4 Exemple d'applications numériques

4.1 Estimateurs récursif de quantiles

On se donne une suite de réalisations $(X_1, \dots X_n, \dots)$ de variables aléatoires, indépendantes et identiquement distribuées, de densité f et de fonction de répartition F. On cherche à estimer, étant donné un nombre $\alpha \in]0;1[$ quelconque, le réel q tel que

$$\int_{-\infty}^{q} f(t)dt = \alpha$$

On se propose d'utiliser le schéma

$$\hat{q}_{n+1} = \hat{q}_n - \gamma_{n+1}\left[\chi_{X_{n+1}\leq \hat{q}_n} - \alpha\right]$$

Démontrer que la suite $\hat{q}_n$ converge presque sûrement vers q.

4.2 Bandit à deux bras

Un bandit à deux bras est une machine à sous simple, on a le choix entre deux bras A et B. En appuyant sur A, on gagne 1 euro avec probabilité θ^A tandis qu'en appuyant sur B, on gagne 1 euro avec probabilité θ^B. L'idéal est de jouer avec le bras pour lequel la probabilité de gagner est la plus grande mais θ^A et θ^B sont inconnus.

On décide d'adopter une stratégie stochastique : on va choisir les bras A ou B de façon aléatoire. Plus précisément, à l'instant n, on choisit le bras A avec une probabilité U_n et le bras B avec une probabilité $1 - U_n$.

On décide de mettre à jour U_n de la façon suivante :

– Si on a gagné avec le bras A à l'instant n, on pose

$$U_{n+1} = U_n + \gamma_{n+1}(1 - U_n)$$

$$U_{n+1} = U_n - \gamma_{n+1} U_n$$

– Sinon, on pose $U_{n+1} = U_n$.

Démontrer que si $\theta^A > \theta^B$, et si $U_0 \in]0; 1[$, alors U_n tend presque sûrement vers 1, tandis que dans le cas contraire, U_n tend presque sûrement vers 0.

4.3 Simulations

– On simulera les algorithmes stochastiques de Robbins Monro pour les applications présentées d'estimation des quantiles et du bandit à deux bras.

– Pour chaque simulation, proposer un comportement asymptotique plus précis que la convergence presque sûre.