

UN PROTOCOLE DE COMMUNICATION

LE SYSTÈME ALOHA

AGRÉGATION DE MATHÉMATIQUES - 2007/2008

Un sujet récurrent s'il en est dans les textes d'option de probabilités et statistiques. Il illustre l'utilisation des Chaînes de Markov et propose le pendant probabiliste d'un système dynamique contrôlé par des majorations type Lyapunov. Tout ceci sera présenté dans la suite du problème de modélisation. Une bonne référence pour la totalité de ce modèle est consultable dans le Brémaud (Springer-Verlag, "Markov Chains, Gibbs Field, Monte Carlo Simulations and Queues").

1 Modélisation du protocole de communication

Nous allons modéliser dans ce TP un canal de transmission de données partagées entre de nombreux utilisateurs. Les utilisateurs, chacun avec un message, désirent accéder à un seul canal de communication pour transmettre leur message. Voici comment ce canal de communication fonctionne.

Les transmissions sont découpées en paquets (*slots* en anglais) de taille fixe. Le temps est donc discrétisé, chaque unité de temps permettant l'émission d'un paquet. Les utilisateurs sont synchronisés sur ces temps. Le canal lui-même ne peut laisser passer qu'une seule émission à la fois et le temps nécessaire à la transmission du message est considéré négligeable ou petit devant l'intervalle de temps disponible pour la transmission. Par conséquent, si deux messages ou plus sont émis en même temps dans le canal, ceux-ci collisionnent et aucun des messages n'est alors transmis. A tout instant, les stations émettrices dispose des informations suivantes :

- le canal est silencieux (aucune émission)
- le canal transmet avec succès une émission
- plusieurs émissions simultanées échouent (on entend du bruit). Dans ce dernier cas, les stations émettrices sont bloquées et le paquet qui vient d'être refusé est en attente d'envoi.

Il faudra par conséquent retenir que :

1. Les messages ne peuvent être transmis qu'à des temps également espacés. L'intervalle de temps constant entre deux temps d'émission potentielle est appelé *slot* et est suffisant pour la transmission d'un message.
2. Tous les messages bloqués nécessitent une retransmission et cette retransmission est décidée, indépendamment des autres messages en attente et des événements passés avec une probabilité $\nu \in]0; 1[$. Cette étape s'appelle la règle de retransmission Bernoulli.
3. Tous les nouveaux messages se présentant pour la première fois aux utilisateurs sont immédiatement passés dans le canal.

On notera X_n le nombre de messages en attente de retransmission au temps n (slot n). Le nombre d'arrivée de nouveaux messages A_n à transmettre au temps n est supposé décrit par un processus de variables aléatoires i.i.d. de distribution a satisfaisant

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{E}A_n = \lambda$$

λ est alors appelé intensité du trafic.

Ce modèle est alors une bonne illustration de la théorie des fonctions de Lyapunov pour les martingales à espace d'états dénombrable. On supposera $a_0 > 0$ et $a_0 + a_1 < 1$.

2 Mise en équation du modèle

1. Étant donnés k messages en attente au slot n , donner la probabilité $b_k(i)$ que i d'entre-eux soient re-émis au slot suivant.
2. Démontrer que X_n est une chaîne de Markov dont on donnera la matrice de transition en fonction des quantités précédemment définies.
3. Quelle est la nature de la chaîne de Markov X_n ?
4. En TP : simuler des trajectoires de X_n dans le cas où la distribution a est une loi de Poisson de paramètre λ . Ces simulations correspondent au cas **non stabilisé**. La procédure prendra en argument le paramètre λ ainsi que la probabilité de re-émission ν .
5. L'objectif de ce paragraphe est de démontrer que le protocole n'est pas stabilisé.
 - (a) Formuler mathématiquement cette « non-stabilisation ».
 - (b) En supposant la chaîne stable, montrer l'existence d'une distribution stationnaire π .
 - (c) Démontrer qu'alors π satisfait

$$\begin{aligned}\pi(i) &= \pi(i) [(1 - b_1(i))a_0 + b_0(i)a_1] + \pi(i-1) [1 - b_0(i-1)] a_1 \\ &\quad + \pi(i+1)b_1(i+1)a_0 + \sum_{l=1}^{\infty} \pi(i-l)a_l,\end{aligned}$$

en imposant $\pi(k) = 0$ pour $k < 0$.

- (d) Soit $P_N = \sum_{k=0}^N \pi(k)$, donner une relation de récurrence satisfaite par P_N .
- (e) Montrer que

$$\sum_{l=1}^N a_l P_{N-l} \leq P_{N-1}(1 - a_0).$$

- (f) En déduire que

$$\frac{\pi(N+1)}{\pi(N)} \geq \frac{1 - a_0 - (1 - \nu)^N a_1}{(N+1)\nu(1 - \nu)^N a_0}.$$

- (g) Conclure que le protocole ALOHA est en l'état instable.

3 Critères de stabilisation de système dynamique probabiliste

3.1 Introduction

On va chercher à modifier le modèle précédent afin qu'il existe une fonction de Lyapunov stabilisant alors le processus. On va alors chercher un critère un peu plus « maniable » que l'existence d'une probabilité invariante comme critère de récurrence positive. Avant toute chose, il est bon de réfléchir à l'exemple suivant.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène sur E , dénombrable. Soit F un sous-ensemble fini de E . Soit $\tau_1 = \inf\{n \geq 1 | X_n \in F\}$, $\tau_2 = \inf\{n \geq \tau_1 | X_n \in F\}$..., les temps successifs de retour dans F . On suppose que pour tout $j \in F$, $P_j(\tau_1 < +\infty) = 1$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, τ_n est fini presque sûrement.
2. Démontrer que le processus $Y_n = X_{\tau_n}$ est une chaîne de Markov homogène sur F .

3.2 Un premier lemme

L'objectif de ce paragraphe est de démontrer un premier lemme très puissant qui va alors impliquer assez simplement les résultats de contrôle (réurrence positive) sur les chaînes de Markov que nous recherchons. Voici l'énoncé du lemme que nous allons démontrer.

Lemme 3.1 *Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov irréductible et homogène par rapport à sa filtration naturelle $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Soit F un sous-ensemble fini de l'espace d'états E . On note τ le premier temps de retour de X dans F . Si pour tout $j \in F$, $\mathbb{E}_j(\tau) < \infty$, alors la chaîne est récurrente positive.*

1. On définit comme dans l'exemple précédent les temps de retour successif τ_n ainsi que la chaîne Y_n . Montrer que Y_n est irréductible.
2. En déduire que Y_n est récurrente positive.
3. On note T_i le premier temps de retour de X pour $i \in F$ et $\tilde{T}_i$ le temps de retour de Y . On pose en plus

$$S_0 = \tau_1 \quad S_k = \tau_{k+1} - \tau_k \quad \forall k \geq 1.$$

Montrer que

$$T_i = \sum_{k=0}^{\infty} S_k 1_{\{k < \tilde{T}_i\}}.$$

4. En déduire que

$$\mathbb{E}_i[T_i] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}_i[S_k 1_{\{k < \tilde{T}_i\}}].$$

5. En remarquant que $\{k < \tilde{T}_i\} \in \mathcal{F}_{\tau_k}$, montrer que pour tout $l \in F$, on a

$$\mathbb{E}_i \left[S_k 1_{\{k < \tilde{T}_i\}} 1_{\{X_{\tau_k} = l\}} \right] = \mathbb{E}_i [S_k | X_{\tau_k} = l] P \left(k < \tilde{T}_i, X_{\tau_k} = l \right).$$

6. Calculer $\mathbb{E}_i [S_k | X_{\tau_k} = l]$.
7. En déduire la majoration :

$$\mathbb{E}_i(T_i) \leq \left(\sup_{l \in F} \mathbb{E}_l[\tau] \right) \mathbb{E}_i[\tilde{T}_i].$$

8. Conclure.

3.3 Théorème de Foster et application au lemme de Pake

L'objet de ce paragraphe est de démontrer le théorème de Foster qui assure la réurrence positive d'une chaîne de Markov sous l'hypothèse d'existence d'une fonction de Lyapunov h . Voici tout d'abord l'énoncé de ce théorème.

Théorème 3.2 (Théorème de Foster) Soit P une matrice de transition irréductible sur un espace d'états dénombrable E associé à une chaîne de Markov X . On suppose qu'il existe une fonction $h : E \mapsto \mathbb{R}$ telle que $\inf_i h(i) > -\infty$ et vérifiant :

$$\mathbb{E}_i[h(X_1)] = \sum_{k \in E} p_{i,k} h(k) < \infty \quad \forall i \in F, \quad (1)$$

et

$$\mathbb{E}_i[h(X_1)] = \sum_{k \in E} p_{i,k} h(k) \leq h(i) - \epsilon \quad \forall i \notin F, \quad (2)$$

où $\epsilon > 0$ et F est un ensemble fini. Dans les conditions (1) et (2), la chaîne X est alors récurrente positive.

1. Montrer qu'on peut se ramener au cas où h est une fonction positive.
2. Si τ désigne (encore!) le premier temps de retour de X dans F , et que Y est le processus $Y_n = h(X_n)1_{n < \tau}$, montrer que l'on a

$$\mathbb{E}_i(Y_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}_i [h(X_{n+1})1_{\{n < \tau\}} | \mathcal{F}_n] \leq 1_{\{n < \tau\}} h(X_n) - \epsilon 1_{\{n < \tau\}}.$$

3. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_i(\tau > k) = \mathbb{E}_i(\tau).$$

Remarque 3.3 : ce genre de formule est à connaître et est valable également sous la forme continue. Elle se re-démontre en procédant à une intégration par parties (discrète ou continue).

4. En déduire alors que

$$0 \leq \mathbb{E}_i(Y_{n+1}) \leq \mathbb{E}_i(Y_n) - \epsilon P(\tau > n),$$

puis que

$$\mathbb{E}_i(\tau) \leq \epsilon^{-1} h(i) \quad \forall i \notin F.$$

5. Dans le cas où $j \in F$, démontrer que

$$\mathbb{E}_j(\tau) \leq 1 + \sum_{i \notin F} p_{j,i} \mathbb{E}_i(\tau).$$

(Remarque : là encore, question très classique sur les chaînes ou processus de Markov, l'idée est de décaler le temps de la chaîne par conditionnement, ce qui fait avancer τ d'une unité).

6. En déduire que si $j \in F$, $\mathbb{E}_j(\tau) < \infty$ puis conclure en utilisant le lemme précédent.

3.4 Lemme de Pake

Voici l'énoncé dont la démonstration découle du théorème précédent de ce lemme qui permet de contrôler effectivement le protocole ALOHA.

Théorème 3.4 (Lemme de Pake) Soit X_n une chaîne de Markov homogène irréductible sur E dénombrable vérifiant

$$\mathbb{E}[X_{n+1} | X_n = i] < +\infty,$$

et tel que

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_{n+1} - X_n | X_n = i] < 0,$$

alors la chaîne est récurrente positive.

1. Pour démontrer ce résultat, appliquer le théorème de Foster à un ensemble $F = \{i \leq i_0\}$ pour un i_0 bien choisi, et h la fonction identité de $\mathbb{N}$.

Remarque 3.5 *La fonction h dans le théorème de Foster est appelée fonction de Lyapunov car elle joue le même rôle que celui joué par les fonctions de Lyapunov classiques dans la théorie de la stabilité pour les équations différentielles. h a en effet tendance à décroître le long des trajectoires du processus en dehors d'un certain ensemble d'état fini F . Puisque h est positive, cette fonction ne va pas pouvoir éternellement décroître et va donc rentrer dans F un jour ou l'autre rentrer dans F .*

4 Stabilisation du protocole ALOHA

Nous allons utiliser le lemme de Pake pour trouver une façon de stabiliser le protocole ALOHA.

1. Pour contourner ce problème d'instabilité, il paraît naturel de jouer sur les paramètres du système. Quel paramètre de contrôle peut-on modifier pour changer le comportement de X_n ?
2. On souhaite faire évoluer le nouveau système en modifiant la règle de Bernoulli dépendant désormais du nombre k de messages en attente. On a alors $\nu = \nu(k)$ comme nouveau paramètre de contrôle. Sachant qu'au slot n le nombre de messages en attente est i , calculer

$$\mathbb{E}[X_{n+1} - X_n | X_n = i].$$

3. En utilisant le lemme de Pake, démontrer qu'on doit établir $\lambda \leq g_i(\nu(i)) - \epsilon$ pour $\epsilon > 0$ avec

$$g_k(\nu) = (1 - \nu)^k a(1) + k\nu(1 - \nu)^{k-1} a(0).$$

4. Démontrer que le choix optimal pour ν est

$$\nu(k) = \frac{a(0) - a(1)}{ka(0) - a(1)}.$$

5. Quelle condition doit-on imposer sur λ pour que le protocole ALOHA soit stable ?
6. Simuler alors des trajectoires de X_n dans de telles conditions.