Cours/TP - Agrégation externe de mathématiques - Chaînes de Markov

Référence : Grimmett-Stirzaker, Feller, ou Ouvrard (tome 2).

1 Propriétés de Markov

Soit X une chaîne de Markov à valeurs dans $E = \{1, 2, 3\}$. On suppose la chaîne homogène de matrice de transition
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Soit f la fonction qui à une séquence de $E^{\mathbb{N}}$ associe 0 si les trois premiers termes sont tous différents de 1 et 1 sinon. Calculer
$$\mathbb{E}_i^{F_N}\left[f(\theta_N(X))\right]$$
2. Soit T le temps d'atteinte de 1 pour la chaîne X. Justifier le fait que pour tout $i \in E$, $P_i(T < \infty) = 1$.
Calculer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}_i^{F_T}\left[f(\theta_T(X))\right]$.

2 Processus de naissance et de mort discret avec barrières élastiques, problème de Dirichlet

Il s'agit de modéliser l'évolution de la taille d'une population dans laquelle à chaque instant n peut apparaître ou disparaître un élément et ceci avec une probabilité qui dépend de la taille de la population X_n. On modélise ainsi le phénomène par une chaîne de Markov homogène telle que
$$M(x, x+1) = p_x \qquad M(x, x-1) = q_x \qquad M(x, x) = r_x.$$
Bien sûr, on a $p_x \geq 0, q_x \geq 0, r_x \geq 0$ et $p_x + q_x + r_x = 1$.
Soient $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq a < b$. On note T_x le temps d'entrée en x de la chaîne de Markov.

1. Montrer que pour tout x, on a
$$P_x(T_a < T_b) = M(x, a) + \sum_{z \neq a, b} P_z(T_a < T_b) M(x, z)$$
2. On suppose que $a = 0$ et que a, b sont des barrières réfléchissantes :
$$q_0 = 0, \qquad p_b = 0, \qquad r_a > 0 \qquad r_b > 0.$$
On suppose en plus que $p_x > 0$ pour tout $x \in]0; b[$. On note $f(x) = P_x(T_0 < T_b)$. Démontrer que f est solution d'une équation de récurrence du second ordre avec conditions aux limites.
3. Calculer explicitement $f(x)$ pour $x \in]0; b[$ en fonction de la suite de terme général a_x donnée par
$$a_0 = 1 \qquad a_x = \frac{q_1 \cdots q_x}{p_1 \cdots p_x}.$$

3 Jeu de pile ou face et chaîne de Markov

On effectue une suite de jets d'une pièce non nécessairement équilibrée et on s'intéresse aux résultats obtenus lors de deux jets consécutifs. En particulier, on étudie la variable aléatoire donnant le nombre de coups nécessaires pour obtenir pile lors de deux jets consécutifs. Soit (X_n) le processus de tirage aléatoire à l'étape n de paramètre p tel que $P(0) = p$. On définit $Y_n = (X_n, X_{n+1})$ et $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On note E l'ensemble des réalisations de Y :

$$\alpha_1 = (1,0) \qquad \alpha_2 = (1,1) \qquad \alpha_3 = (0,0) \qquad \alpha_4 = (0,1).$$

1. Quelle est la loi de X ?
2. Calculer pour toute fonction réelle f sur E $\mathbb{E}\left[f(Y_{n+1})|\mathcal{F}_n\right]$. En déduire que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov.
3. Donner la matrice de transition de Y et vérifier alors que $M^n = M^2$.
4. Déterminer le graphe associé à cette chaîne et spécifier les classes de communication.
5. Déterminer la nature et la période des points de E.
6. On étudier sous la probabilité P_x la loi du premier temps de passage T de la chaîne en α_2. Pour cela, on note
$$f_k(i) = P_{\alpha_i}(T = k).$$
Démontrer que la suite f_k est solution d'une équation de récurrence d'ordre un.
7. En déduire que la suite des probabilités $f_k(1)$ est solution de l'équation de récurrence d'ordre 2 :
$$x_k = qx_{k-1} + pqx_{k-2}.$$
8. Déterminer deux solutions particulières et la valeur de la probabilité $f_k(1)$.
9. Calculer le temps moyen $\mathbb{E}_{\alpha_1}[T]$.
10. Justifier l'existence d'une unique probabilité invariante et la calculer. En déduire le temps moyen $\mathbb{E}_{\alpha_2}[T]$ et le comparer à $\mathbb{E}_{\alpha_1}[T]$.