Cours/TD/TP- Agrégation externe de mathématiques - Martingales - 2008/2009

Références : Grimmett-Stirzaker (chapitre 7) ou Ouvrard tome 2 (chapitre 15) ou Williams.

1 Quelques exemples d'applications sur la définition de Martingale

Dans tout ce qui suit, on admet tous les résultats théoriques qui permettent de mener les calculs intuitifs jusqu'au bout. Ils seront justifié un peu plus tard. C'est tout l'art de motiver la curiosité des étudiants...

1.1 La Martingale

Un parieur adopte une stratégie récursive et mise à chaque fois qu'il joue le double de ce qu'il vient de perdre au coup précédent. Il stoppe le jeu dès qu'il gagne. On compte Y_n (en positif ou négatif) les gains du parieurs. $Y_0 = 0$ et la mise initiale est 1. À chaque coup, le parieur possède une probabilité égale de gagner ou de perdre.

1. Montrer que Y_n est une martingale.
2. On note T le temps d'arrêt du jeu, quelle est la distribution de T ?
3. Quelle est l'espérance de gain ?

1.2 L'exemple de De Moivre

On considère une marche aléatoire S_n simple sur $\mathbb{N}$ basé sur une loi $X_i = 1$ avec probabilité p, $X_i = -1$ avec probabilité $1 - p$. On définit en plus des barrières absorbantes 0 et N de sorte que le jeu s'arrête dès qu'une de ces barrières est atteinte. On initialise la marche aléatoire à $S_0 = k$.

1. Trouver une martingale sous-jacente. (Il y en a au moins 2 ici mais une seule est utile dans cet exercice).
2. Si p_k désigne la probabilité d'atteindre 0 avant N, exprimer p_k.

1.3 Chaîne de Markov

X une chaîne de Markov à valeur dans un espace d'état dénombrable noté S. On note P la "matrice" de transition de la chaîne. Soit ψ une application de S dans S harmonique, c'est-à-dire telle que

$$P\psi = \psi.$$

1. Trouver la martingale.

1.4 Fabriquer des sous-martingales à partir d'une martingale

Donner un moyen simple et efficace de définir de nouvelles sous-martingales à partir d'une martingale X.

2.1 Résultat de concentration

L'objet est de démontrer le résultat suivant : si X est une martingale telle que $|X_n - X_{n-1}| \leq K_n$ p.s. Alors

$$P(|X_n - X_0| \geq x) \leq 2e^{-\frac{x^2}{2\sum_{i=1}^n K_i^2}}$$

1. Démontrer que
$$\forall \theta > 0 \qquad P(X_n - X_0 \geq x) \leq e^{-\theta x)}\mathbb{E}e^{\theta(X_n - X_0)}$$

2. Démontrer que
$$\forall \theta > 0 \quad \forall |d| \leq 1 \qquad e^{\theta d} \leq \frac{1-d}{2}e^{-\psi} + \frac{1+d}{2}e^{\psi}$$

3. Si D est une variable aléatoire bornée par 1, montrer qu'alors
$$\mathbb{E}[e^{\theta D}] \leq e^{\psi^2/2}.$$

4. Démontrer qu'alors
$$P(X_n - X_0 \geq x) \leq e^{-\theta x + \frac{\theta^2}{2}\sum_{i=1}^n K_i^2}$$

5. Conclure.

2.2 Applications

Grandes déviations et marches aléatoires

Soient (X_i) des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre p et S_n la marche aléatoire associée. Montrer que

$$P\left(\frac{|S_n - np|}{\sqrt{n}} \geq x\right) \leq 2e^{-x^2/(2\mu)}$$

où $\mu = max(p, 1-p)$.
D'autres applications se trouveront dans le G-S.

3 Temps d'arrêt

3.1 Exemples de temps d'arrêt

1. Montrer que une variable constante est un temps d'arrêt, ainsi qu'un temps d'atteinte d'un processus adapté à $\mathcal{F}_n$ ou un temps de dernier passage.
2. Montrer que le minimum de 2 temps d'arrêt est un temps d'arrêt.

3.2 Application de l'inégalité maximale de Doob

1. Inégalité de Doob-Kolmogorov : Soit X une martingale L^2, alors
$$P\left(\max_{0\leq k\leq n} |X_k| \geq x\right) \leq \frac{\mathbb{E}X_n^2}{x^2}$$

2. Inégalité de Kolmogorov Soient (X_i) variables aléatoires indépendantes de moyenne et variance finie, on note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, alors
$$P\left(\max_{1\leq k\leq n} |S_k - \mathbb{E}(S_k)| \geq x\right) \leq \frac{var(S_n)}{x^2}$$

1. Repenser aux premiers exemples introductifs.
2. Si S_n désigne une marche aléatoire symétrique simple sur $\mathbb{Z}$ initialisée à 0 et si on note $-a$ et b deux états absorbants, calculer l'espérance du temps d'arrêt de la marche aléatoire.
3. D'autres applications simples dans le G-S.

4 Application des théorèmes de Convergence des Martingales

4.1 Loi du 0-1 de Kolmogorov

Soient $X_0, X_1, \dots X_n$ des variables aléatoires indépendantes. On note $\mathcal{H}_n = \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$ et $\mathcal{T} = \cap_{n\geq 0}\mathcal{H}_n$. Alors, pour tout $A \in \mathcal{T}$, $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$.

4.2 Illustration de différents cas de convergence de martingales (cas L2)

Soient X_i des variables de Bernoulli de paramètre 1/2 et S donnée par

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i X_i.$$

1. Montrer que S est une martingale.
2. Démontrer que si les a_i vérifient $\sum a_i^2 < \infty$, la martingale S converge p.s.
3. Que se passe-t-il si $\sum a_i^2 = \infty$? (On pourra alors appliquer la loi du 0-1 de Kolmogorov).

4.3 Loi forte des grands nombres

On va chercher à illustrer le résultat suivant. Si X est une martingale L^2, si on note $< X >_\infty$ la limite de son processus croissant prévisible, alors sur $< X >_\infty = \infty$, chaque X_n est p.s. non nul et à partir d'un certain rang $X_n / < X >_n \to 0$ p.s.

Traduire ce théorème dans le cas où les X_i sont des i.i.d. centrées ayant un moment d'ordre 2 σ^2.

5 Résumé des résultats importants

5.1 Résultat sur les temps d'arrêt

Un premier résultat sur les temps d'arrêt, fondamental et souvent couplé au théorème de Beppo Levi (pour un passage à la limite croissant) :

Theorem 5.1 (Premier Théorème d'arrêt) *X un processus adapté à $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a l'équivalence entre*
– X est une martingale intégrable
– pour T un temps d'arrêt borné, $X_T \in L^1$ et $\mathbb{E}X_T = \mathbb{E}X_0$.
– X_T est une martingale par rapport à $\mathcal{F}_T$.
Par ailleurs, si S et T sont des temps d'arrêt bornés tels que $S \leq T$, alors

$$\mathbb{E}[X_T|\mathcal{F}_S] = X_S$$

5.2 Résultats de majoration de probabilité d'événement

Deux résultats de majoration de probabilité d'événements maximaux :

$$P(\sup_{0\leq n\leq N} X_n \geq \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon}\int_{\left(\sup\limits_{0\leq n\leq N} X_n\right)>\epsilon} X_N dP$$

et a fortiori

$$P(\sup_{0\leq n\leq N} X_n \geq \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon}\mathbb{E}|X_N|$$

En particulier, si X est une martingale intégrable bornée dans L^1, la variable aléatoire $X^\star = \sup_{n\in\mathbb{N}}|X_n|$ est finie p.s.

Theorem 5.3 (Inégalité de Doob) *Soit X une martingale bornée dans L^2, $X^\star$ est dans L^2 et on a :*

$$\|X^\star\|_{L^2} \leq 2\sup_{n\in\mathbb{N}}\|X_n\|_{L^2}$$

5.3 Décomposition de Doob

Theorem 5.4 (Décomposition de Doob) *Soit X une sous-martingale, alors il existe une unique martingale M et un unique processus croissant prévisible A tel que*

$$X = M + A$$

Par ailleurs, on a

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{E}X_n^+ < \infty \Longleftrightarrow \sup_n \mathbb{E}|M_n| < \infty \qquad et \qquad A_\infty \in L^1$$

5.4 Convergences des martingales

Un résultat de convergence des martingales L^2

Theorem 5.5 (Convergence L^2) *X martingale bornée dans L^2, alors X_n converge P p.s. et dans L^2 vers X_∞. Par ailleurs*

$$\mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_n] = X_n$$

Un résultat de convergence des martingales L^1

Theorem 5.6 (Convergence L^1) *Toute martingale bornée dans L^1 converge P p.s.*
Enfin, si X martingale bornée dans L^1 et T un temps d'arrêt, la martingale arrêtée X^T converge P p.s.

5.5 Convergences des sur- et sous-martingales

Theorem 5.7 *Si X est une sous-martingale telle que $\sup\mathbb{E}X_n^+ < \infty$, alors X_n converge P p.s.*
Si X est une sur-martingale positive, alors X_n converge P p.s. vers X_∞ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et on a

$$X_n \geq \mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_n]$$

6 Problème de la ruine du joueur

Un joueur joue à pile ou face avec une pièce non nécessairement équilibrée. On note p la probabilité d'obtenir pile lors d'un jet. Il reçoit un euro de la banque s'il obtient pile et en donne un à la banque s'il obtient face.

une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé, indépendantes, de même loi $p\delta_1 + q\delta_{-1}$ où $q = 1 - p$. La fortune du joueur S_n après n parties est alors définie par

$$S_0 = a \qquad \text{et} \qquad S_n = a + \sum_{j=1}^{n} Y_j$$

On pose $Y_0 = a$, $\mathcal{F}_n$ les filtrations naturelles des processus Y et S (qui sont les mêmes), on note aussi T le temps d'arrêt du jeu, c'est-à-dire

$$T = \inf\{n \in \mathbb{N}^* \quad | \quad S_n = 0 \quad \text{ou} \quad S_n = a + b\}$$

Les objectifs sont multiples :
- calculer la probabilité $P(T < \infty)$.
- calculer $\rho = P(S_T = a + b)$.
- calculer le temps moyen du jeu.
- simuler l'évolution de la fortune du joueur dans les différentes situations possibles.

1. Déterminer la nature du processus S suivant les valeurs de p.
2. Lancer différentes simulations du processus S selon différentes valeurs de p, a, b : on écrira une procédure ruine.m prenant en arguments a, b, p ainsi que N correspondant au nombre maximum de « coups »dans une partie.
3. On suppose $p > q$:
   (a) Écrire la décomposition de Doob de la sous-martingale S et préciser son processus croissant prévisible A.
   (b) En déduire que $\mathbb{E}T < \infty$ et préciser la valeur de $P(T < \infty)$ en utilisant le théorème d'arrêt. On montrera alors que
   $$\mathbb{E}[T] \leq \frac{b}{p - q}$$
   (c) Lancer différentes simulations pour estimer $\mathbb{E}[T]$ en écrivant une procédure ruinet.m prenant en arguments a, b et p et renvoyant le nombre de « coups »avant la fin de la partie. Vérifier alors l'inégalité précédente en effectuant une estimation « Monte-Carlo »de $\mathbb{E}[T]$.
   (d) Donner une expression de $\mathbb{E}T$ en fonction de ρ.
   (e) On définit pour $s > 0$ le processus $U = s^S$. Déterminer s pour que U soit une martingale non constante.
   (f) Vérifier qu'alors la martingale arrêtée U^T converge presque sûrement et dans L^1 vers U_T en utilisant le théorème d'arrêt.
   (g) En déduire les valeurs de ρ puis $\mathbb{E}T$.
   (h) Retrouver ces valeurs à l'aide de simulation numériques.
4. Étude du cas $p = 1/2$:
   (a) Vérifier que S est une martingale de carré intégrable et déterminer son processus croissant prévisible B. En déduire $\mathbb{E}T < \infty$, préciser alors la valeur de $P(T < \infty)$.
   (b) Vérifier que la martingale arrêtée S^T converge presque sûrement dans L^1, L^2 vers S_T.
   (c) En déduire les valeurs de $\mathbb{E}S_T, \rho$ et $\mathbb{E}T$.