

TP 5 - ESTIMATION, STATISTIQUE EXHAUSTIVE- AGRÉGATION EXTERNE DE MATHÉMATIQUES - 2005/2006.

Estimation autour de la loi de Poisson

L'objectif du TD/TP est de construire un estimateur sans biais, de variance minimale des probabilités $P(X = k)$ lorsque X suit une loi de Poisson de paramètre λ . On note $(X_1, \dots, X_n)$ un n -échantillon de loi $\mathcal{P}(\lambda)$, où λ est un paramètre inconnu à estimer.

1. On cherche tout d'abord à estimer ce paramètre λ , calculer $\mathbb{E}(X_i)$ et proposer un estimateur $\hat{\lambda}_n$ de λ .
2. Montrer que la statistique $S = X_1 + \dots + X_n$ est une statistique exhaustive et complète. Qu'en conclure pour l'estimateur de λ ?
3. Programmer en Matlab une fonction "*echantillon_poisson.m*" qui prend en arguments le paramètre λ et la taille de l'échantillon n à construire et qui construit un vecteur X , n -échantillon de loi $\mathcal{P}(\lambda)$.
4. De la même façon, programmer une fonction matlab "*estimateur_lambda.m*" qui calcule $\hat{\lambda}_n$.
5. On cherche désormais à estimer la probabilité $p_k = P(\mathcal{P}(\lambda) = k)$.
 - (a) Une première idée peut être d'utiliser l'estimation $\hat{\lambda}_n$. Que penser de l'estimateur

$$\hat{p}_{n,k}^1 = \frac{e^{-\hat{\lambda}_n} \hat{\lambda}_n^k}{k!}$$

- (b) Une seconde idée est d'utiliser l'estimateur naturel construit à partir des variables aléatoires $Y_i = \chi_{X_i=k}$. Donner un estimateur sans biais de p_k .
- (c) Programmer une fonction matlab "*esb_proba.m*" qui prend en argument l'entier k et un n -échantillon et qui construit l'estimateur sans biais $\hat{p}_{n,k}^2$ précédemment évoqué.
- (d) Calculer la variance de l'estimateur précédent.
- (e) On souhaite désormais utiliser l'amélioration de Rao-Blackwell pour augmenter la précision de l'esb précédent. Calculer l'esbvm $\hat{p}_{n,k}^3$ construit à partir de la statistique exhaustive et de l'esb précédent.
- (f) Programmer une fonction matlab "*esbvm_proba.m*" qui prend en argument l'entier k et un n -échantillon et qui construit l'estimateur sans biais de variance minimale de p_k .
- (g) Calculer la variance de l'estimateur.
- (h) Programmer une fonction matlab "*histo_poisson.m*" qui permet de tracer les histogrammes obtenus en soustrayant aux estimateurs précédents la valeur théorique p_k avec comme arguments l'entier k , un nombre d'échantillons tirés N , la longueur n d'un échantillon et enfin le paramètre λ . Quel est le meilleur estimateur ?