

IUP Systèmes Intelligents - Algèbre linéaire - Exercices

Sébastien Gadat
gadat@cict.fr

23 mai 2014

Exercice 1 Montrer que si u_1, u_2 et u_3 forment une famille libre de E , alors $u_1 + u_2$, $u_2 + u_3$ et $u_3 + u_1$ aussi.

Exercice 2 Dans $\mathbb{R}^3$, on considère l'ensemble F des triplets vérifiant

$$5x - 3y + z = 0$$

1. Montrer que F est un sev de $\mathbb{R}^3$.
2. On considère G l'ensemble des points tels que

$$x + y + z = 0$$

Déterminer une base de $F \cap G$.

Exercice 3 Dans $\mathbb{R}^n$, on considère l'ensemble F des points dont la somme des coordonnées est nulle :

$$\sum x_i = 0$$

1. Montrer que F est un sev de $\mathbb{R}^n$.
2. On pose G l'espace engendré par $(1, 0, \dots, 0)$. Montrer que F et G sont supplémentaires.

Exercice 4 Dans l'espace des polynômes de degré 3 au plus, on considère les sous-ensembles définis par les conditions suivantes :

1. P est de degré exactement 3.
2. $P(2) = 3P(4)$
3. $P(t) \geq 0$ pour $t \in [-1; 1]$
4. la dérivée P' est paire.
5. $P(1 - t) = P(t)$ pour $t \in [0; 1]$
6. $P(2) = 0$

7. $P(2) = 1$
8. $XP'(X) = P(X)$

Exercice 5 Les ensembles de vecteurs suivants sont-ils indépendants ?

1. $x = (1, -1, 0, 0)$, $y = (0, 1, -1, 0)$, $z = (0, 0, 1, -1)$
2. $x = (1, -1, 0, 0)$, $y = (0, 1, -1, 0)$, $z = (0, 0, 1, -1)$, $t = (-1, 0, 0, 1)$
3. $x : t \mapsto 1/t$ et $y : t \mapsto t$.

Exercice 6 Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

$$f_1 : (x, y) \mapsto (1 + x, y) \quad f_2 : (x, y) \mapsto (x^2, y) \quad f_3 : (x, y) \mapsto (\sin(x), y) \quad f_4 : (x, y) \mapsto (x - y, 0)$$

Exercice 7 On note F l'ensemble des points de $\mathbb{R}^4$ vérifiant

$$x - 2y = 0$$

et G l'ensemble des points tels que

$$y + 2z + 3t = 0$$

Montrer que F et G sont des sev de $\mathbb{R}^4$. Sont-ils supplémentaires ?

Exercice 8 Soit E l'ensemble des fonctions f telles qu'il existe a, b, c, d pour lesquels :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = a \sin x + b \cos x + c \sin 2x + d \cos 2x$$

1. On note f_0, f_1, f_2 et f_3 les fonctions associées respectivement à $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$ et $\cos 2x$. Montrer que (f_0, f_1, f_2, f_3) est une famille libre et génératrice de E . Quelle est la dimension de E ?
2. On note F_1 l'ensemble des fonctions de E telles que $f' = -f$, F_2 l'ensemble des fonctions telles que $f(\pi - x) = f(x)$, et enfin F_3 le sous-ensemble de E vérifiant $f(\pi/2 - x) = f(x)$. Montrer que ces 3 ensembles sont des sev. Préciser à chaque fois une base et la dimension de ces ensembles.

Exercice 9 On considère dans $\mathbb{R}^3$ l'espace $H = \text{vect}\{(1, 1, 1); (1, 1, -1)\}$ et $D = \text{vect}((0, 1, -1))$. Montrer que

$$\mathbb{R}^3 = H \oplus D$$

Exercice 10 Soit $u(0, 3, -2)$, $v(1, 1, -1)$ et $w(3, 63, 1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Donner la dimension de $F = \text{vect}(u, v, w)$.
2. Donner un supplémentaire de F .

Exercice 11 Montrer que F l'ensemble des fonctions linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (donc s'écrivant $f(x) = ax$ pour un certain a) et G l'ensemble des fonctions telles que $f(1) = 0$, sont des sev supplémentaires dans l'espace vectoriel des fonctions réelles.

Exercice 12 Soit $u(1, 1, 1, 1)$ et $v(1, 0, -1, 0)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$. On note E le sev engendré par u et v . On note F l'ensemble des vecteurs s'écrivant (x, y, z, t) avec $x = 2y$ et $z = 2t$. Démontrer que $\mathbb{R}^4 = E \oplus F$.

Exercice 13 Montrer que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel et en trouver une base.

Exercice 14 Montrer que $f : (x, y, z) \mapsto (z, x - y, y + z)$ est une application linéaire inversible.

Exercice 15 Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $f : (x, y, z) \mapsto (x - y + z, x + 2y - z, 2x + z)$. Montrer que f est une application linéaire et déterminer son noyau et son image.

Exercice 16 Soit E l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. À toute fonction de E on associe ϕ_f définie par

$$\phi_f(x) = f(0) \cos x + f(1) \sin x$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Est-elle injective ? surjective ?