TP 3 - Simulation de lois - Agrégation externe de mathématiques - 2005/2006.

1 Échantillonnage préférentiel

Méthode générale

On cherche à estimer, à partir d'une variable aléatoire X de densité connue, des quantités du type $\mathbb{E}[f(X)]$. L'idée générale est d'utiliser la convergence presque sure et dans L^1 de la moyenne empirique d'un échantillon de v.a. i.i.d. vers leur espérance commune. Cependant, en terme de variance de l'estimation donnée par cette moyenne empirique, il peut être intéressant d'utiliser un n-échantillon de $\tilde{X}$, autre v.a. à densité par rapport à X.

Exercice 1.1 *Démontrer que si $\tilde{X}$ possède une densité par rapport à X, et que $(\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_n)$ désigne un n-échantillon, alors*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\tilde{X}_i)\frac{P_X(\tilde{X}_i)}{P_{\tilde{X}}(\tilde{X}_i)} \longrightarrow \mathbb{E}[f(X)]$$

Application à l'estimation des moments de $\mathcal{N}(0,1)$

Exercice 1.2

1. *Utiliser la propriété précédente pour $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $\tilde{X} \sim \mathcal{L}(\lambda)$. Calculer*

   $$\tilde{Y} = f(\tilde{X})\frac{P_X(\tilde{X})}{P_{\tilde{X}}(\tilde{X})}$$

   ainsi que la variance des estimateurs obtenus par le biais de $\tilde{X}$.
2. *Comparer avec la variance de l'estimateur donné par X lorsque $f(u) = u$ pour $\lambda = 1$. (Code Matlab)*
3. *Définir le "meilleur" λ et en donner une estimation via Matlab.*

Application à l'estimation de la queue d'une gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$

On souhaite désormais estimer la probabilité

$$P\left(\mathcal{N}(0,1) \geq 3\right)$$

Exercice 1.3 *On définit la variable aléatoire Y par $Y = \chi_{X\geq 3}$.*

1. *Quelle est la loi de Y ?*
2. *On définit $\tilde{X} \sim \mathcal{N}(3,1)$ et $\tilde{Y} = \chi_{\tilde{X}\geq 3}$.*
3. *Quel est l'estimateur par la méthode de l'échantillonage préférentiel ici ?*
4. *Calculer la variance des deux estimateurs (ceux donnés par X et $\tilde{X}$).*
5. *Donner une approximation (en utilisant Matlab) de la "meilleure" loi $\mathcal{N}(m,1)$ pour $\tilde{X}$.*