COURS/TP 2 - AGRÉGATION EXTERNE DE MATHÉMATIQUES - MARCHES ALÉATOIRES ET RUINE DU JOUEUR - 2007/2008

Référence : Grimmett-Stirzaker (chapitre 3) ou Ouvrard tome 2.

1 Présentation élémentaire des marches aléatoires

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de v.a. de Bernouilli i.i.d. centrées (réalisation $+1$ ou -1) et de paramètre p . On pose

$$S_n = S_0 + \sum_{k=1}^n X_k$$

S_0 est une mise initiale et peut être une v.a. également, mais indépendante des X_i . Cette modélisation correspond au déplacement d'une marche aléatoire simple sur $\mathbb{N}$. Cette marche aléatoire est symétrique lorsque $p = 1/2$.

1. En TP, simuler plusieurs lancers de marches aléatoires simples en fonction de p et n .
2. Montrer la propriété d'homogénéité spatiale :

$$P(S_n = j | S_0 = a) = P(S_n = j + b | S_0 = a + b)$$

3. Montrer la propriété d'homogénéité temporelle :

$$P(S_n = j | S_0 = a) = P(S_{m+n} = j | S_m = a)$$

4. Montrer que les marches aléatoires simples ont la propriété de Markov :

$$P(S_{m+n} = j | S_0, S_1, \dots, S_m) = P(S_{m+n} = j | S_m)$$

2 Problème de la ruine du joueur

Un joueur a une fortune initiale de k et désire atteindre une fortune N avec bien sûr $0 < k < N$. Il parie toujours sur pile qui a une probabilité p d'arriver. L'objectif est d'estimer la probabilité qu'il a de se ruiner sans atteindre son but. On définit A_k l'événement le joueur se ruine en commençant avec une fortune de k .

1. Donner une formule de récurrence sur les $p_k := P(A_k)$ pour $1 < k < N - 1$.
2. Vérifier que la formule obtenue s'étant au cas $k = 1$ et $k = N - 1$.
3. Dans le cas $p = 1/2$, montrer que

$$p_k = 1 - \frac{k}{N}$$

Interpréter le résultat.

4. Dans le cas où p quelconque, vérifier

$$p_k = \frac{(q/p)^k - (q/p)^N}{1 - (q/p)^N}$$

5. Montrer que le temps d'arrêt du jeu t_k est presque sûrement fini.
6. On pose $D_k = \mathbb{E}t_k$. Démontrer que

$$D_k = (1 + D_{k+1})p + (1 + D_{k-1})q \quad 1 \leq k \leq N - 1 \quad D_0 = D_N = 0.$$

7. En déduire

$$D_k = \frac{1}{q-p} \left(k - N \left(\frac{1 - (q/p)^k}{1 - (q/p)^N} \right) \right) \quad p \neq \frac{1}{2}$$

où

$$D_k = k(N - k) \quad \text{si} \quad p = \frac{1}{2}.$$

3 Simulation numérique

La principale difficulté est de lancer un certain nombre de trajectoires. Dans un texte d'oral, les simulations qu'on pourrait proposer seraient ce qui suit.

1. Faire un code qui permet lancer autant de trajectoires qu'on souhaite et avec comme paramètres à la fois N , p la probabilité de gain à chaque étape, et k la mise initiale.
2. Estimer p_k et comparer avec le résultat théorique.
3. De même estimer le temps de jeu D_k .
4. Quelles simulations faire sur l'exercice suivant ?

4 Utilisation des fonctions génératrices

On considère toujours une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ initialisée à 0. On pose

$$p_0(n) = P(S_n = 0) \quad \text{et} \quad f_0(n) = P(S_1 \neq 0, \dots, S_{n-1} \neq 0, S_n = 0).$$

f_0 est la probabilité de revenir en 0 après n pas. On note les fonctions génératrices obtenues :

$$P_0(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_0(k) s^k \quad F_0(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f_0(k) s^k.$$

L'objet de l'exercice est d'établir des relations entre F_0 et P_0 .

1. On note $A = \{S_n = 0\}$ et B_k est l'événement de retour à l'origine après k pas. Montrer que

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(A|B_k)P(B_k).$$

2. Montrer que

$$P(A|B_k) = p_0(n - k).$$

3. En déduire la relation :

$$p_0(n) = \sum_{k=1}^n p_0(n - k) f_0(k) \quad n \geq 1.$$

Conclure alors que

$$P_0(s) = 1 + P_0(s)F_0(s)$$

4. En utilisant de la combinatoire, établir que si n est pair :

$$p_0(n) = C_n^{n/2} (pq)^{n/2}.$$

Que vaut $p_0(n)$ si n est impair ?

5. En conclure que

$$P_0(s) = (1 - 4pqs^2)^{-1/2} \quad \text{et} \quad F_0(s) = 1 - (1 - 4pqs^2)^{1/2}.$$

6. En déduire que la probabilité de retour à l'origine est $1 - |p - q|$.
7. Dans le cas $p = 1/2$, établir que le temps de retour est en espérance infini.