TD 10 - Agrégation de Mathématiques - Grandes Déviations Précises - 2006/2007.

Notations - Définitions

L'objectif de ces travaux dirigés est de donner quelques résultats de grandes déviations pour des sommes de variables aléatoires i.i.d. On note $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. de loi μ, on suppose que le support de μ est $\mathbb{R}$ tout entier que la log transformée de Laplace Λ est *finie partout*. On rappelle sa définition :

$$\Lambda(\theta) = \log \mathbb{E}_\mu[e^{\theta X}] = \log\left(\int_{\mathbb{R}} e^{\theta x} d\mu(x)\right)$$

On définit également sa transformée de Legendre

$$\Lambda^\star(x) = \sup_{\theta\in\mathbb{R}} [\theta x - \Lambda(\theta)]$$

et la nouvelle mesure

$$\mu_\theta(dx) = e^{\theta x - \Lambda(\theta)}\mu(dx)$$

Il s'agit d'étudier comment la loi de la moyenne empirique

$$\frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

s'écarte de l'espérance de μ. Pour cette étude, on notera μ_n la loi de S_n/n et $\tilde{\mu_n^\theta}$ désignera la loi de W_n obtenu par changement de variables :

$$W_n = \frac{S_n - n\mathbb{E}_{\mu_\theta}[X]}{\sqrt{nVar_{\mu_\theta}(X)}}$$

lorsque $(X_1, \ldots, X_n)$ suivent la loi $\mu_\theta^{\otimes n}$.

Résultats élémentaires

On étudie tout d'abord une application simple de l'inégalité de Markov dans le cas Gaussien où les calculs se font explicitement.

1. Démontrer que si μ est $\mathcal{N}(0,1)$, on a
$$\lim_{n\mapsto\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > x\right) = 0$$
dès que $x > 0$.
2. Plus précisément, établir l'équivalent
$$\frac{1}{n}\log\left(P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > x\right)\right) = -\frac{x^2}{2}$$

Grandes Déviations Précises

1. Pour $\theta > 0$ et $a = \Lambda'(\theta)$, démontrer qu'en réalité $\Lambda'(\theta) = \mathbb{E}_{\mu_\theta}X$ et $\Lambda"(\theta) = Var_{\mu_\theta}X$.
2. Exprimer en fonction de W_n et d'une espérance $\mu_n([a; a+h])$.
3. Calculer explicitement $\Lambda^\star(a)$.
4. En déduire que
$$\mu_n([a; +\infty]) = e^{-n\Lambda^\star(a)} \int_0^\infty e^{-\gamma_n t} d\tilde{\mu_n^\theta}(t)$$
où γ_n est une constante indépendante de t que l'on précisera.

Démontrer que :

$$J_n(h) = e^{-nh\theta}\left[F_n\left(\frac{h\sqrt{n}}{\sqrt{\Lambda"(\theta)}}\right) - F_n(0)\right] + \int_0^{\theta nh} e^{-u}\left[F_n(u/\gamma_n) - F_n(0)\right] du$$

où F_n désigne la fonction de répartition de $\tilde{\mu_n^\theta}$.

6. On rappelle le théorème de Berry-Esséen :

Théorème 1 (Berry-Esséen) *Soit Y_n une suite de v.a.i.i.d centrées réduites. On note m_3 le moment d'ordre 3 de Y qu'on suppose fini. Si G_n désigne la fonction de répartition de $\frac{Y_1+\cdots+Y_n}{\sqrt{n}}$, alors*

$$\lim_{n\mapsto\infty} \sqrt{n} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| G_n(x) - \Phi(x) - \frac{m_3}{6\sqrt{n}}(1-x^2)\phi(x) \right| = 0$$

où ϕ est la densité de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ et Φ sa fonction de répartition.

En appliquant ce théorème, calculer alors la limite de :

$$\lim_{n\longmapsto\infty} \gamma_n \int_0^\infty e^{-\gamma_n t} d\tilde{\mu_n^\theta}$$

7. Étudier les différents équivalents obtenus :
   (a) $\mu_n([a; a+h_n])$ avec $nh_n \longmapsto \infty$.
   (b) $\mu_n([a; a+b/n])$ avec $b > 0$.
   (c) En déduire que la suite des lois de $(S_n | S_n \geq 0)$ converge vers une limite que l'on explicitera.