TP 8 - Tests d'hypothèses composites

1 Exercice 1

Reprendre les simulations des 2 TPS précédents, notamment celles sur les tests.

2 Hypothèses composites pour le modèle exponentiel

Θ ouvert de $\mathbb{R}$, on considère $H_0 = \{\theta \in \Theta \quad | \quad \theta \leq \theta_0\}$ et $H_1 = \{\theta \in \Theta \quad | \quad \theta > \theta_0\}$. On suppose que la famille des densités est de la forme

$$p(x, \theta) = C(\theta)h(x)e^{Q(\theta)S(x)}$$

où Q est strictement monotone. On pose alors $S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} S(x_i)$. On a alors la proposition :

Proposition 2.1 *Soit $\alpha \in]0; 1[$, il existe un test UPP de niveau α pour tester H_0 contre H_1 défini par*

$$\phi(x) = 1 \quad si \quad S_n(x) > c \qquad et \qquad \phi(x) = 0 \quad si \quad S_n(x) < c \qquad et \qquad \phi(x) = \gamma \quad si \quad S_n(x) = c$$

Les constantes γ et c sont déterminées par la condition $\mathbb{E}_{\theta_0}[\phi] = \alpha$.

Remarque 2.2 *Il n'existe pas en général de test UPP pour tester H_0 contre une hypothèse alternative bilatère du type $H_1 = \{\theta \neq \theta_0\}$.*

1. Démontrer ce résultat dans le cas particulier du modèle gaussien de moyenne inconnue et de variance fixée.
2. On admettra le théorème :

   Théorème 2.3 (Tests UPPS) *Il existe un test UPPS au seuil α pour tester $H_0 =]\theta_1; \theta_2[$ contre $H_1 = \Theta \backslash]\theta_1; \theta_2[$. Ce test est défini par*

   $$\phi(x) = 1 \quad si \quad S_n(x) \notin [c_1; c_2] \qquad et \qquad \phi(x) = \gamma_i \quad si \quad S_n(x) = c_i \qquad et$$

   Les constantes sont alors déterminées par les conditions $\mathbb{E}_{\theta_1}[\phi] = \alpha$ et $\mathbb{E}_{\theta_1}[\phi] = \alpha$.

   Déterminer un test pour le modèle gaussien d'hypothèse nulle $H_0 = \{\mu = \mu_0\}$ et d'hypothèse alternative $H_1 = \{\mu \neq \mu_0\}$ de niveau $\alpha = 5\%$ et de puissance maximale parmi les tests sans biais.

Application numérique

Une machine fabrique des ailettes de turbo avec pour caractéristique la longueur d'une ailette $\sim \mathcal{N}(L_0, \sigma_0)$. On souhaite avoir $L_0 = 785mm$ et $\sigma_0 = 2mm$. Une trop grande dispersion des caractéristiques peut avoir deux conséquences :
– Les ailettes trop longues ne sont pas montables.
– Les ailettes trop courtes nuisent aux performances du turbo.
On a donc étudié la variance et σ_0 peut être considéré comme fixé et invariable. Par contre, la longueur moyenne a tendance à varier. On désire vérifier que les caractéristiques de la machine n'ont pas trop dérivé, *i.e.* $L \in]L_0 - \delta L; L_0 + \delta L[$ avec $\delta L = 1.5mm$. On procède à l'analyse de $n = 200$ ailettes, ce qui conduit à $\hat{L_n} = 788.3mm$.

1. Vérifier que le modèle est exponentiel, construire un estimateur de L.
2. On souhaite tester $H_0 = L \in]L_0 - \delta L; L_0 + \delta L[$ contre $H_1 = L \notin]L_0 - \delta L; L_0 + \delta L[$. Construire un test bilatéral UPPS au seuil α pour tester H_0 contre H_1.
3. Faire l'application numérique pour $\alpha = 5\%$.
4. Calculer un intervalle de confiance centré à 95% sur L et le comparer à $L_0 + \delta L$.

3 Test de Wald pour hypothèses implicites

On considère un échantillon $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ de v.a. de lois $\mathcal{N}((\mu_1, \mu_2); \Sigma_2)$ avec

$$\Sigma_2 = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

où σ_1 et σ_2 sont inconnus. Le paramètre θ est donc $(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2)$.

1. Donner le test de Wald pour tester si $\mu_1 = \mu_2$ et donner sa région critique de niveau $\alpha = 5\%$.
2. On suppose $\sigma_1 = \sigma_2$, donner une région critique de niveau exact 5%, construite à l'aide de la même statistique de test que celle utilisée précédemment. Application numérique pour $n = 15$.
3. On dispose de 2 échantillons de tailles différentes $(X_1; \ldots; X_{n_1})$ et $(Y_1; \ldots; Y_{n_2})$ de lois respectives $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ où μ_i et σ_i^2 sont inconnus. Déduire des questions précédentes un test asymptotique en $\min(n_1, n_2)$ pour l'hypothèse nulle $\mu_1 = \mu_2$ contre son alternative $\mu_1 \neq \mu_2$.