TP 15 - Processus de Galton Watson

On étudie l'évolution de la taille des générations successives d'une population d'individus qui donnent chacun naissance à un nombre aléatoire de descendants suivant la même loi de probabilité μ. En particulier, il s'agit d'évaluer la probabilité d'extinction de la population.

Le modèle est le suivant. On considère une variable aléatoire ξ de loi de probabilité μ sur $\mathbb{N}$ telle que $0 < \mu(\{0\}) < 1$ et telle que $0 < m < +\infty$ où m désigne la moyenne de μ. Enfin, on note g la fonction génératrice de μ définie sur $[0; 1]$ par

$$g(u) = \sum_{n=0}^{\infty} u^n \mu(n)$$

On considère une famille indexée sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^\star$ de variables aléatoires $Y_{n,i}$ définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et de même loi μ. $Y_{n,i}$ représente le nombre de descendants directs du i-ième individu de la n-ième génération.

On se donne de plus un entier $a \geq 1$ qui est le nombre d'individus dans la population initiale. Le processus X, dit processus de branchement ou processus de Galton-Watson est défini par

$$X_0 = a \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad X_{n+1} = 1_{\{X_n \geq 1\}} \sum_{j=1}^{X_n} Y_{n,j}$$

On appelle X processus de branchement car les individus peuvent être identifiés aux noeuds de ramification d'un arbre au sens d'arbre généalogique.
On prendra la convention d'écriture :

$$\sum_{j=1}^{0} Y_{n,j} = 0$$

La filtration naturelle $\mathcal{F}_n$ du processus X sera la seule filtration considérée par la suite.

1. Démontrer que X est une chaîne de Markov homogène de matrice de transition M à déterminer.
2. Démontrer que X est une sur-/sous-/martingale selon les valeurs de m.
3. Nous allons tout d'abord illustrer les propriétés suivantes
   (a) Si $m < 1$, la population s'éteint P-p.s. et la vitesse d'extinction est contrôlée par la majoration
   $$P(X_n > 0) \leq m^n$$
   (b) Si $m = 1$, la population s'éteint encore P-p.s. mais la convergence de $P(X_n > 0)$ vers zéro est beaucoup plus lente puisque si $\mathbb{E}[\xi^2] < +\infty$ on a
   $$P(X_n > 0) \sim \frac{2}{n\mathbb{E}[\xi(\xi - 1)]}$$

(c) Si $m > 1$ et $\mathbb{E}[\xi^2] < +\infty$, alors la probabilité d'extinction est strictement plus petite que 1 et lorsqu'il n'y a pas extinction, la population explose à vitesse exponentielle. Plus précisément,

$$\frac{X_n}{m^n} \longmapsto W \qquad \text{pour} \quad n \longmapsto +\infty$$

avec $W > 0$ sur l'événement « non extinction ».

On va chercher à vérifier les points (a) et (b) par un calcul du type Monte-Carlo et le troisième par des simulations. On choisira des tailles d'échantillon égales à 2000 et un nombre de génération égal à 250. On traitera dans chaque cas deux exemples :

- μ est de support « petit » donc facile à simuler.
- μ est une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Écrire une fonction Matlab simulant une loi de Poisson de paramètre quelconque.
Écrire une fonction Matlab simulant une loi de support fini $\mu = (\mu_0, \dots \mu_k)$.

4. Dans les deux cas où $P(\xi = 0) = 1/3, P(\xi = 1) = 1/2, P(\xi = 2) = 1/6$ ou $\xi \sim \mathcal{P}(3/4)$, tracer sur un même graphique les évolutions de $1/n \log(\hat{P}(X_n > 0)$ de $n = 1$ à $n = 250$ par rapport à $\mathbb{E}[\xi]$ où $\hat{P}$ désigne la probabilité empirique observée sur les 2000 échantillons.
5. Dans les deux cas où $P(\xi = 0) = 1/4, P(\xi = 1) = 1/2, P(\xi = 2) = 1/4$ ou $\xi \sim \mathcal{P}(1)$, tracer sur un même graphique les évolutions de $n\hat{P}(X_n > 0)$ et de $\frac{2}{\mathbb{E}[\xi(\xi-1)]}$ de $n = 1$ à $n = 250$.
6. Dans les deux cas où $P(\xi = 0) = 1/5, P(\xi = 1) = 1/2, P(\xi = 2) = 1/5, P(\xi = 3) = 1/10$ et $\xi \sim \mathcal{P}(2)$, tracer quinze évolutions du rapport
$$\frac{X_n}{m^n}$$
7. On définit $Y_n = X_n/m^n$. Démontrer que Y est une martingale positive.
8. Si $m > 1$, on admettra qu'il existe un unique réel $s \in]0; 1[$ tel que $g(s) = s$. On définit alors $Z_n = s^{X_n}$. Démontrer que Z est une martingale équi-intégrable.
9. Démontrer que X converge P-p.s. vers X_∞ en étudiant séparément les deux cas $0 < m \leq 1$ et $m > 1$. Identifier la limite dans le cas où $0 < m < 1$.
10. Soit j un entier strictement positif. Calculer
$$P\left(\bigcap_{n=N}^{k} X_n = j\right)$$
en fonction de $M(j, j)$ et de $P(X_N = j)$.
En déduire que $P(\liminf_n X_n = j) = 0$.
11. Démontrer alors que l'on a pour tout j strictement positif
$$P(X_\infty = j) = 0$$
et qu'en conséquence $X_\infty \in \{0; \infty\}$ P-p.s. Justifier le fait que tous les points de $\mathbb{N}^*$ sont transitoires.
12. Si $m > 1$, déduire de la question 8 que l'on a
$$P(X_\infty = 0) = s^a \qquad \text{et} \qquad P(X_\infty = +\infty) = 1 - s^a$$
13. On note T le temps d'extinction du processus X, c'est-à-dire le temps d'entrée en 0. Vérifier que l'on a P-p.s.
$$(X_\infty = 0) = \liminf_n (X_n \neq 0) = (T = +\infty)$$
En déduire la valeur de $P(T < +\infty)$ pour les différentes valeurs de m.