TP 2 - Simulation de variables aléatoires discrètes - Agrégation externe de mathématiques - 2006/2007

1 Simulation d'une loi binomiale

1. Comment peut-on, à partir de la fonction rand, simuler une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$?
2. En déduire une méthode de simulation d'une loi binomiale de paramètres n et p. Faire N simulations (sans utiliser de boucle "for" ?) et comparer sur une même figure l'histogramme des valeurs obtenues avec la loi théorique.

2 Simulation d'une loi de Poisson

1. Soit $\lambda > 0$, et soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et uniformes sur $[0,1]$. Soit Y la variable aléatoire définie par

$$Y = \min\{n \geq 0 \,|\, X_0 \times ... \times X_n \leq e^{-\lambda}\}.$$

On admet que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ (Démontrer en exercice).
2. En déduire un algorithme de simulation d'une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Faire N simulations et comparer sur une même figure l'histogramme des valeurs obtenues et la répartition théorique (on pourra utiliser les fonctions while, hist et cumprod).

3 Méthode d'inversion pour une loi discrète

En généralisant la méthode d'inversion déjà vue pour les variables aléatoires continues, écrire une fonction permettant de faire directement N simulations d'une variable aléatoire X à valeurs dans un ensemble fini $\{x_1, \dots, x_n\}$ avec la loi $\{p_1, \dots p_n\}$.

4 Simulation d'une loi géométrique

Toujours en généralisant la méthode d'inversion, faire N simulations d'une variable aléatoire X de loi géométrique de paramètre p, c'est à dire telle que :

$$\forall k \geq 1\,, \quad P(X = k) = (1-p)^{k-1}p.$$

Tracer sur un même graphique l'histogramme des N valeurs obtenues et la loi théorique.