L3 - S5 - Mise à niveau Mathématiques
Magistère d'Économiste et Statisticien

Version du 25 Aout 2014

Toulouse School of Economics

Université Toulouse I Capitole

Table des matières

Notations
Algèbre linéaire et bilinéaire

Dans la totalité de ce polycopié de cours, on utilisera généralement les notations suivantes.

— $\mathbb{R}$ sera l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{C}$ celui des nombres complexe.

— $E, F, G, \ldots$ désigneront des **espaces vectoriels** ou sous-espaces vectoriels

— $\mathbb{R}^n$ désigne l'**espace vectoriel** réel de dimension n

— u, v, w désigneront des **endomorphismes**

— $A, B, C, M, \ldots$ désigneront des **matrices** généralement carrées à coefficients réels

— $x, y, z, \ldots$ désigneront des vecteurs

— $X, Y, Z, \ldots$ désigneront des **vecteurs colonnes**

— Un vecteur d'un espace vectoriel E admet de multiples décompositions selon la base considérée. Par abus de notation, on notera parfois

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

en lieu et place de

$$M_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

mais on réservera cette notation aux coordonnées du vecteur x dans la base canonique généralement notée $\mathcal{B}$.

— A^t désignera la matrice transposée de A.

— $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées réelles de taille $n \times n$.

— Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté, X désignera la variable d'un polynôme et $P(X)$ ou simplement P sera le polynôme.

Chapitre 1

Compléments d'Algèbre - Réduction des endomorphismes réels

1.1 Motivations

On considère E un espace vectoriel de dimension finie, et u un endomorphisme de E (dans E). De même, on considère une matrice A réelle carrée de taille $n \times n$, agissant par multiplication à gauche sur $\mathbb{R}^n$.

On entend par réduction d'un endomorphisme u (resp. matricielle) la notion de simplification de l'action de l'endomorphisme (resp. de la matrice) dans l'espace vectoriel E considéré (resp. dans $\mathbb{R}^n$). Cette simplification permet alors d'aboutir à une description simple de l'action de l'endomorphisme, au travers d'une **base** de l'espace adaptée à u. Cette **base de vecteurs propres** permet ainsi de décomposer l'espace en directions sur laquelle u agit peu ou prou comme une homothétie (nous verrons que c'est le cas précisément lorsque u est diagonalisable).

Par ailleurs, l'intérêt des réductions d'endomorphisme est multiple, et finalement motivé par des applications de ces réductions dans des domaines extérieurs à ceux de l'algèbre linéaire, même si cela peut paraître surprenant.

1.1.1 Suites récurrentes linéaires

La motivation la plus couramment rencontrée consiste en la résolution de **suites récurrentes linéaires** d'ordre 2. De telles suites sont décrites par $(u_n, v_n)_{n\geq 0}$ au travers de relations du type $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ et

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Cette équation générique peut alors se récrire en

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}.$$

De manière immédiate, si on note $U_n = (u_n, u_{n+1})^t$, on voit alors que $U_n = A^n U_0$. Si on parvient à décomposer l'espace $\mathbb{R}^2$ en directions 'principales' selon lesquelles A se comporte comme une homothétie, alors les puissances de A s'écriront facilement. Ceci se traduit en algèbre linéaire par

$$A = P^{-1}DP \qquad \text{puis} \qquad A^n = P^{-1}D^nP$$

Cette dernière équation peut être fort utile si les puissances de D sont simples à calculer, ce qui est en particulier le cas des matrices diagonales... Nous rappelerons dans la suite ce que représente les matrices P et D. Ces résultats sur les suites linéaires peuvent bien sûr se généraliser à des suites d'ordre supérieur à 2.

1.1.2 Systèmes différentiels

Une seconde application classique se rapporte aux systèmes différentiels linéaires. On cherche par exemple à résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f' & = & f+g \\ g' & = & f \end{array} \right.$$

À nouveau, en posant $F = (f,g)^t$, le système différentiel précédent est équivalent à $F' = AF$ avec A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La résolution de cette équation différentielle vectorielle est, sous cette forme, standard et

$$F(t) = \exp(tA)F(0), \forall t \geq 0.$$

Il convient dont de calculer la fonction $t \longmapsto \exp(tA)$ où

$$\exp(M) = \sum_{n\geq 0} \frac{M^n}{n!}$$

Là encore, sans information supplémentaire sur M, cette exponentielle est loin d'être simple à calculer, mais si par contre M s'écrit $M = P^{-1}DP$ avec D matrice diagonale, alors $M^n = P^{-1}D^nP$ puis finalement

$$\exp(M) = P^{-1}\exp(D)P \qquad \text{avec} \qquad \exp(D) = \begin{pmatrix} e^{d_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{d_{2,2}} & & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{d_{n,n}} \end{pmatrix}$$

En fin de compte, la fonction F peut dans certains cas s'écrire

$$F(t) = P^{-1}\exp(tD)PF(0),$$

où D est la matrice diagonale correspondant à la diagonalisation de la matrice A précédente.

1.1.3 Analyse en composantes principales

Une dernière motivation qui pour le moment vous paraîtra mystérieuse est une application importante en statistiques descriptives. Un nuage de n points de $\mathbb{R}^d$ est observé et on cherche à identifier dans ce nuage de points un certain nombres de directions principales permettant au mieux de décrire le jeu de données. Vous verrez dans vos premiers cours de statistiques que ces directions principales sont en fait les premiers vecteurs propres de la matrice de covariance du jeu de données. Si on note X la matrice de taille $n \times d$ où sont rangées les n individus en ligne, alors la matrice de covariance Σ^2 est la matrice carrée $d \times d$ donnée par

$$\Sigma^2 = (X - m(X))^t(M - m(X)),$$

où $m(X)$ est la matrice de centrage du nuage de points. Nous verrons dans les rappels de cours que cette matrice Σ^2 est nécessairement diagonalisable en base orthonormée, de par son caractère symétrique. Les valeurs propres sont d'ailleurs positives ou nulles et les plus grandes valeurs propres représentent les directions principales recherchées.

1.2 Vecteurs propres, valeurs propres, sous-espaces propres

Dans toute la suite, E et F sont des $\mathbb{R}$ espaces vectoriels (on peut ajouter deux vecteurs, les multiplier par un nombre réel).

1.2.1 Applications et matrices

Définition 1.2.1 (Application linéaire et matrices) *Une application linéaire u de E dans F est une application qui satisfait*

i) $u(x+y) = u(x) + u(y), \qquad \forall (x,y) \in E^2$

ii) $u(\lambda x) = \lambda u(x), \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E$

Quelques exemples : rotations centrées en 0, homothéties centrées en 0, projections sur un plan contenant 0. Attention, une translation n'est pas une application linéaire mais une application affine, de même pour les opérations précédentes dont le centre n'est pas l'origine.

On rappelle qu'à tout endomorphisme u et base canonique $\mathcal{B}$ est associée une matrice $A = (a_{i,j})_{1\leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ où l'on peut lire l'image de e_i sur la i-ème colonne de A.

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$$

1.2.2 Changement de base

Un vecteur X étant repéré par ses coordonnées dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, on a vectoriellement

$$X = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n.$$

Étant donné une autre base $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ définie au travers de relations

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i,$$

on définit la matrice de changement de base $P = (a_{i,j})_{(i,j)}$. Cette matrice correspond à l'écriture des coordonnées de la nouvelle base **en colonne** dans l'ancienne base. Un exemple : on définit

$$e'_1 = e_1 + e_2 \qquad e'_2 = e_1 - 3e_2.$$

La matrice de changement de base P est alors

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Les coordonnées d'un vecteur X de E dans la base $\mathcal{B}$ sont notées en colonne et si X' désigne les coordonnées du même vecteur dans $\mathcal{B}'$, on a alors la relation

$$X = PX'. \tag{1.1}$$

Cette relation se démontre simplement en considérant que

$$\begin{aligned} x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n &= x'_1 e'_1 + \ldots + x'_n e'_n \\ &= \sum_{j=1}^{n} x'_j \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} e_i \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x'_j. \end{aligned}$$

La relation s'obtient alors en utilisant le fait que $\mathcal{B}$ est une base et en identifiant les coordonnées 2 à 2.

Cette relation (1.1) permet d'écrire l'effet d'un changement de base pour un endomorphisme. Si A désigne la matrice de l'endomorphisme f dans la base canonique et si P est une matrice de changement de base, on a alors en notant X les coordonnées dans la base canonique, Y son image, et X' les coordonnées dans $\mathcal{B}'$ dont l'image est Y' :

$$Y = AX \Longleftrightarrow PY' = APX' \Longleftrightarrow Y' = P^{-1}APX'.$$

Aussi, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ est notée A' et est donnée par

$$A' = P^{-1}AP. \tag{1.2}$$

1.2.3 Valeurs propres d'endomorphismes

Définition 1.2.2 (Valeur propre - Vecteur propre - Sous-espace propre (endomorphismes)) *On rappelle :*

i) Un réel λ est valeur propre d'un endomorphisme u s'il existe un vecteur x de E non nul tel que

$$u(x) = \lambda x$$

ii) Un vecteur x non nul est vecteur propre de u s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$u(x) = \lambda x$$

iii) Si λ est une valeur propre de u, on note E_λ l'espace propre défini par

$$E_\lambda := \{x \in E \quad | \quad u(x) = \lambda x\}.$$

Proposition 1.2.1 *Si λ est valeur propre de u, alors*

$$E_\lambda = \ker(u - \lambda Id).$$

Par ailleurs, E_λ est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve : Il suffit de récrire la définition : pour λ valeur propre de u, E_λ désigne l'ensemble des vecteurs tels que $u(x) = \lambda x$ soit $(u - \lambda Id)(x) = 0$. Ainsi, $E_\lambda = ker(u - \lambda Id)$. □

On appellera spectre de u l'ensemble des valeurs propres de u.

1.2.4 Valeurs propres de matrices

L'analogie entre endomorphisme et matrice carrée évoquée ci-dessus permet d'étendre les définitions spectrales précédentes au cas des matrices.

Définition 1.2.3 (Valeur propre - Vecteur propre - Sous-espace propre (matrices)) *On rappelle :*

i) Un réel λ est valeur propre d'une matrice A s'il existe un vecteur X non nul de $\mathbb{R}^n$ tel que

$$AX = \lambda X$$

ii) Un vecteur X non nul est vecteur propre de A s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$AX = \lambda X$$

iii) Si λ est une valeur propre de A, on note E_λ l'espace propre défini par

$$E_\lambda := \{X \in \mathbb{R}^n \quad | \quad AX = \lambda X\}.$$

1.2.5 Exemples simples

- $u = 0$ ou $M = 0$: il n'y a qu'une seule valeur propre : 0 ! Tous les vecteurs non nuls sont vecteurs propres : $E_0 = E$.
- $u = Id$ ou $M = I_n$: il n'y a qu'une seule valeur propre : 1 ! Tous les vecteurs non nuls sont vecteurs propres : $E_1 = E$.
- Matrice diagonale A donnée par
$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$
Les valeurs propres sont les réels λ_i, où $1 \leq i \leq n$. Si ces valeurs propres sont distinctes, alors les espaces propres sont de dimension 1 qui sont les droites vectorielles engendrées par les vecteurs e_i de la base canonique.
- Matrice diagone A donnée par
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$
Les valeurs propres sont 1 et -2 (termes diagonaux). Les espaces propres sont
$$E_1 = Vect(e_1, e_2) = \{(x, y, 0) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$
et
$$E_{-2} = Vect(e_3).$$
- Matrice triangulaire donnée par
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$
Les valeurs propres sont 1 et 3 et espaces propres : $E_1 = vect((1, 0)$ et $E_3 = Vect((-2, 1))$.
- Matrice triangulaire donnée par
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
La seule valeur propre est 1 et l'espace propre est $E_1 = vect((1, 0)$.
- On considère l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}[X]$ (espace des polynômes) défini par $f(P) = XP'(X)$, pour tout polynôme P. Les valeurs propres de f sont toutes les valeurs entières $n \geq 1$. Par ailleurs, les espaces propres sont les espaces $E_n = Vect(X^n)$.
- Les homothéties possèdent une seule valeur propre, *i.e.* le rapport de l'homothétie et l'espace propre associé est la totalité de l'espace.
- Les symétries sont caractérisées par $s \circ s = Id$. Elles possèdent deux valeurs propres, 1 et -1. Par ailleurs, s est la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_{-1}.
- Les projections possèdent 2 valeurs propres, 0 et 1. On a $E_0 = ker(p)$ et $E_1 = Im(p)$.

1.2.6 Rappels sur le déterminant et la trace

Formellement, rappelons que le déterminant d'une matrice A est défini ainsi.

Définition 1.2.4 (Déterminant) *Soit* $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ *une matrice réelle. Le déterminant de* A *vaut*

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i},$$

où $\epsilon(\sigma)$ *est la signature de la permutation* σ.

On notera que pour $n = 2$ ou $n = 3$, on retrouve la définition usuelle :

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

et

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = a_1(b_2c_3 - b_3c2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1).$$

On reconnaît par ailleurs ici la fameuse méthode de calcul du déterminant d'une matrice par développement selon la première ligne.

Un petit jeu d'écriture sur les permutations de $\mathfrak{S}_n$ permet de se convaincre de l'invariance du déterminant par l'application trace :

Proposition 1.2.2

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \qquad \det(A^t) = \det(A).$$

Preuve : On écrit la définition du déterminant de A *via* la somme sur toutes les permutations. On obtient

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i},$$

tandis que

$$\det(A^t) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a^t_{\sigma(i),i}.$$

Cette dernière expression se récrit en utilisant la bijectivité de toute permutation de $\mathfrak{S}_n$ et le fait que la signature de σ est la même que celle de σ^{-1} :

$$\det(A^t) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma^{-1}(i),i}.$$

Comme $\sigma \in \mathfrak{S}_n \Longleftrightarrow \sigma^{-1} \in \mathfrak{S}_n$, on en déduit que

$$\det(A^t) = \sum_{\tilde\sigma\in\mathfrak{S}_n} \epsilon(\tilde\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\tilde\sigma(i),i},$$

en ayant posé $\tilde\sigma = \sigma^{-1}$. Cela achève la démonstration. □

Plus généralement, on a la proposition suivante.

Proposition 1.2.3 *Pour toute matrice* A *carrée de taille* $n \times n$ *et si* ℓ *désigne un entier entre* 1 *et* n, *notons* Δ_j *le déterminant obtenu en supprimant la ligne* ℓ *et la colonne* j, *alors on a*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{\ell+j} \det(\Delta_j)$$

Enfin, nous listons en vrac une succession de rappels fondamentaux sous forme de propositions.

Proposition 1.2.4

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \qquad \det(AB) = \det(BA) = \det(A)\det(B).$$

Cela a un effet immédiat donné par le corollaire suivant.

Corollaire 1.2.1 *A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$ et dans ce cas :*

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Attention, l'égalité suivante est fausse, sauf cas extrêmement particuliers (!) :

$$\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B).$$

On a enfin

On rappelle l'utilité des comatrices dans les dernières lignes de ce paragraphe.

Définition 1.2.5 (Comatrice) *Si A est une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors sa comatrice notée $com(A)$ est la matrice carrée de terme général*

$$com(A)_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(A^{i,j})$$

où $A^{i,j}$ est la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j.

Les quantités $(-1)^{i+j} A^{i,j}$ sont appelés les cofacteurs de la matrice A et forment donc la comatrice ou matrice des cofacteurs.

Théorème 1.2.1 *Pour toute matrice A inversible, on a*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} com(A)^t.$$

Définition 1.2.6 (Trace) *La trace $\operatorname{tr}(A)$ d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est la somme des coefficients de la diagonale.*

On rappelle les relations importantes qui s'établissent en revenant à la définition précédente.

Proposition 1.2.5

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \qquad \operatorname{tr}(\alpha A) = \alpha \operatorname{tr}(A), \operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B), \qquad et \qquad \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$$

et

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \qquad \operatorname{tr}(A^t) = \operatorname{tr}(A).$$

De la même façon, on en déduit que la trace est invariante par changement de base, ce qui légitime la notion de trace d'endomorphisme tout autant que trace d'une matrice.

Théorème 1.2.2 *Si $A' = P^{-1}AP$, alors*

$$\operatorname{tr}(A') = \operatorname{tr}(A).$$

1.2.7 Polynôme caractéristique

Une re-écriture de la définition des valeurs propres d'un endomorphisme aboutit au théorème suivant, ceci en vertu du Corollaire 1.2.1.

Théorème 1.2.3 *Soit f un endomorphisme de E et A la matrice de f dans une base quelconque de E. Alors,*

$$\lambda \textit{ est valeur propre de } f \quad \Longleftrightarrow \quad \det(f - \lambda \mathrm{Id}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \det(A - \lambda I) = 0.$$

Preuve : La démonstration repose sur la remarque que si λ est une valeur propre, alors $f - \lambda Id$ est non injective et donc $\det(f - \lambda Id) = 0$ (il y a même équivalence). □

Ainsi, la recherche des valeurs propres de f ou de A se réduit à la recherche des solutions λ de l'équation

$$\det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Ceci justifie donc l'introduction de l'objet important suivant.

Définition 1.2.7 (Polynôme caractéristique) *On appelle polynôme caractéristique de A :*

$$P_A(X) = \det(A - X\mathrm{I}_n).$$

On appelle polynôme caractéristique de f :

$$P_f(X) = \det(f - X\mathrm{Id}).$$

Les valeurs propres sont donc les racines du polynôme caractéristique.

Exemple 1.2.1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad P_A(X) = (1 - X)(2 - X)^2.$$

Le déterminant pour obtenir le polynôme caractéristique se calcule ici très simplement, ce qui peut ne pas être le cas dans les exemples que nous verrons ultérieurement. Les valeurs propres de A sont donc 1 et 2.

Définition 1.2.8 (Ordre de multiplicité des valeurs propres) *Si λ est valeur propre de A (ou de f), elle est racine du polynôme caractéristique : $P_A(X) = (X - \lambda)^{n_\lambda} Q(X)$ avec $Q(\lambda) \neq 0$. L'entier n_λ s'appelle l'* ordre de multiplicité *de λ.*

Théorème 1.2.4 *Soit P_A le polynôme caractéristique de $A \in M_n(\mathbb{R})$. Alors :*
i) P_A est un polynôme de degré n.
ii) Le terme de plus haut degré est $(-1)^n X^n$.
iii) Le coefficient constant est $P_A(0) = \det(A)$. Le coefficient de X^{n-1} est $(-1)^{n-1}\mathrm{tr}(A)$.

Preuve : Le i) se démontre en se convaincant que dans la définition du déterminant au travers des permutations σ, on ne peut faire le produit de la variable X qu'au plus n fois car

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i},$$

Par ailleurs,pour obtenir exactement X^n et le ii), il convient d'utiliser une permutation σ unique qui est l'identité. On constate alors immédiatement que le terme obtenu est

$$\epsilon(Id)(a_{1,1} - X) \times (a_{2,2} - X) \ldots \times (a_{n,n} - X).$$

La signature de la permutation identité est 1, et le terme de plus haut degré est donc $(-1)^n X^n$.

En se souvenant que P_A est un polynôme, on sait alors que le coefficient constant vaut $P_A(0)$ soit

$$P_A(0) = \det(A - 0Id) = \det(A).$$

Enfin, la même gymnastique sur la définition du déterminant au travers des permutations permet de constater qu'on ne peut obtenir un terme de degré $n-1$ qu'en utilisant la permutation identité (sinon, on n'utilise qu'au plus n-2 produits de termes $a_{i,i} - X$. Finalement, on obtient le iii). □

1.3 Diagonalisabilité de matrice ou d'endomorphismes

1.3.1 Somme directe des sous-espaces propres

On rappelle que U et V sont des sous-espaces vectoriels en somme directe s'ils vérifient

$$\forall x \in (U + V) \qquad \exists!(u, v) \in U \times V \qquad x = u + v.$$

Le théorème suivant assure le "découpage" de l'espace en directions qui sont naturellement en somme directe.

Théorème 1.3.1 *Si λ_1, λ_2, ..., λ_p sont des valeurs propres deux à deux distinctes et si v_1, v_2, ..., v_p sont des vecteurs propres associés, alors*

i) $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ est une famille libre

ii) Les espaces propres associés sont en somme directe

$$E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}.$$

Attention, dans le dernier point, notez bien que la somme directe n'est pas nécessairement égale à l'espace tout entier.

Preuve : On démontre le résultat $i)$ par récurrence sur p.

Ce résultat est bien sûr vrai pour $p = 1$. Supposons qu'il soit vrai jusqu'à $p-1$ et on cherche à l'établir au rang p. Pour ce faire, on considère $v_1, \ldots, v_p$ associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ deux à deux distinctes. On suppose que ces p vecteurs forment une famille liée. Il existe donc $\alpha_1, \ldots \alpha_p$ tels que

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_p v_p = 0.$$

On applique alors l'endomorphisme f (ou on multiplie à gauche par la matrice A et obtenons que

$$\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + \alpha_p \lambda_p v_p = 0 = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + \alpha_p \lambda_p v_p - \lambda_p(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_p v_p).$$

On vient donc de démontrer que si les $(v_1, \ldots v_p)$ sont liés, alors il en est de même des $(v_1, \ldots v_{p-1})$. On applique l'hypothèse de récurrence à cette dernière famille pour obtenir une contradiction.

Le $ii)$ est une retraduction simple en utilisant les sous-espaces vectoriels. □

On obtient alors la conséquence facile :

Corollaire 1.3.1

$$\dim(E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}) = \dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} + \cdots + \dim E_{\lambda_p}.$$

1.3.2 Diagonalisabilité

Définition 1.3.1 (Diagonalisabilité) *Voici la "vraie" définition de la diagonalisabilité d'endomorphismes ou de matrices.*

i) Un endomorphisme $f : E \to E$ est diagonalisable s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de f.

ii) Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est digonalisable s'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A.

Aussi, en utilisant le cadre de cette définition, et en se plaçant dans la base diagonalisant la matrice ou l'endomorphisme, les résultats suivants sont quasiment tautaulogiques.

Théorème 1.3.2 *Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable si, et seulement s'il existe une matrice inversible $P \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale.*

Preuve : Supposons A diagonalisable, il suffit alors de considérer la base de vecteurs propres de A et considérer l'endomorphisme associé dans cette base. Il est "diagonal" et la matrice de changement de base P permet d'obtenir le résultat obtenu (cf équation (1.2)). $\square$

Théorème 1.3.3 *f est diagonalisable si, et seulement si :*

$$E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}.$$

Preuve : Là encore, c'est un argument quasiment tautologique : A est diagonalisable s'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ de vecteurs propres. On note $\lambda_1, \dots \lambda_p$ les valeurs propres associées. Parmi cette base, on isole les vecteurs associés à la valeur propre E_{λ_1}, puis à E_{λ_2}, etc. On sait que E_{λ_1}, E_{λ_2}, etc sont en somme directe. Par ailleurs, ils engendrent l'espace E. D'où la conclusion.

Réciproquement, si

$$E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p},$$

alors tout élément de E s'écrit de manière unique comme la somme d'un élément de chaque E_{λ_j}. Il suffit alors de considérer une base pour chaque sous-espace vectoriel E_{λ_j}. La réunion sur les p espaces propres de ces vecteurs de bases forme une base de E de vecteurs propres. $\square$

Corollaire 1.3.2 *Un endomorphisme ou une matrice est diagonalisable si, et seulement si :*

$$\dim E = \dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} + \cdots + \dim E_{\lambda_p}.$$

Théorème 1.3.4 *Soit λ une valeur propre et n_λ sa multiplicité. Alors :*

$$1 \leq \dim E_\lambda \leq n_\lambda.$$

Preuve : La démonstration de se résultat repose sur la représentation du polynôme caractéristique au travers d'un changement de base. On considère l'espace propre E_λ de dimension d et on complète E_λ en une base de E. Dans la base obtenue, la matrice de l'endomorphisme est structurée par bloc :

$$\begin{pmatrix} D & B \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

où la matrice D est triangulaire supérieure avec des λ sur la diagonale. On calcule alors le polynôme caractéristique de cette matrice bloc et nous constatons qu'il s'écrit $(X-\lambda)^d P_C(X)$. On obtient alors que d est nécessairement plus petit que l'ordre de multiplicité de λ dans P_A. $\square$

1.3.3 Polynômes d'endomorphismes ou de matrices

C'est la notion "ultime" pour la réduction d'endomorphismes ou de matrices.

Définition 1.3.2 *On considère un polynôme réel $P \in \mathbb{R}[X]$. Ce polynôme P s'écrit en toute généralité*

$$P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k.$$

On dit que P est un polynôme annulateur d'une matrice A (ou d'un endormorphisme u) s'il vérifie

$$P(A) = 0 \qquad ou \qquad P(u) = 0.$$

Si la quantité $P(A)$ se comprend aisément au travers des puissances de A, il faut également penser que $P(u)$ se réfère implicitement à la même notion : A^k est la multiplication k fois de la matrice A et correspond à la composée k fois d'un endormorphisme. Ainsi, u^k doit être compris comme $u^k = u \circ u \circ \ldots u$. Un cas particulier est $A^0 = I_n$ ou bien $u^0 = Id$.

Un de ces polynômes sera plus important que les autres, c'est le polynôme caractéristique, en vertu du théorème suivant.

Théorème 1.3.5 (Théorème de Cayley-Hamilton) *Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a*

$$P_A(A) = 0.$$

Voici un exemple simple : on considère la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique est $P_N(X) = X^n$ et on a bien $N^n = 0$.

Un autre exemple simple : on considère la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 1 \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & \\ 0 & \ddots & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On vérifiera que $P_J(X) = X^n - 1$ et que $J^n = I_n$.

Pour démontrer ce théorème, on aura besoin du Lemme suivant.

Lemme 1.3.1 *Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0$, P est le polynôme caractéristique de la matrice compagnon*

$$C(P) = \begin{pmatrix} 0 & & -a_0 & \\ 1 & \ddots & \vdots & \\ & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

La démonstration s'appuie sur un développement selon la première ligne et nous obtenons ensuite le résultat en s'appuyant sur une récurrence. Passons alors à la démonstration du théorème de Cayley-Hamilton.
Preuve : Soit f un endomorphisme de E et $x \in E$, on va démontrer que $P_f(f)(x) = 0$. Cette égalité est bien sûr vraie pour $x = 0$. Pour $x \neq 0$, on note

$$\nu = \min\{k \geq 2 | (x, f(x), \ldots, f^k(x)) \text{ liée}\}.$$

Pour tout x, on a nécessairement $\nu \leq n$ et par ailleurs, de par la définition du minimum, on sait que

$$(x, f(x), \ldots, f^{k-1}(x)) \text{est libre.}$$

Aussi, $f^\nu(x)$ se décompose en

$$f^\nu(x) = a_0 x + a_1 f(x) + \ldots + a_{\nu-1} f^{\nu-1}(x).$$

On complète la famille libre $(x, f(x), \ldots, f^{k-1}(x))$ en une base de E dans laquelle f s'écriera alors

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & & & a_0 & * \\ 1 & \ddots & & \vdots & * \\ & \ddots & 0 & a_{\nu-2} & * \\ & & 1 & a_{\nu-1} & * \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{C}(P) & * \\ 0 & M \end{pmatrix},$$

où $\mathcal{C}(P)$ désigne la matrice compagnon de

$$P(X) = X^\nu - a_{\nu-1} X^{\nu-1} - \cdots - a_0.$$

Après un calcul de déterminant par bloc, on obtient alors que

$$P_A(X) = P_{\mathcal{C}(P)}(X) P_M(X) = P(X) \times P_M(X).$$

En appliquant alors ce résultat en x, on obtient

$$P_f(f)(x) = P_M\left(P_f(x)\right) = P_M(0) = 0.$$

Cette dernière égalité permet de conclure la démonstration. □

1.3.4 Critères de diagonalisations

La définition suivante ne concerne uniquement que la notion de polynôme.

Définition 1.3.3 (Polynôme scindé) *Un polynôme P est scindé sur $\mathbb{R}$ s'il s'écrit sous la forme :*

$$P(X) = a \cdot \prod (X - \alpha_i)^{n_i}$$

avec $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

Il est important de noter qu'ici, les racines α_i doivent être nécessairement **réelles**. En particulier, un polynôme réel est toujours scindé sur $\mathbb{C}$ (théorème de D'Alembert) mais ne l'est pas nécessairement sur $\mathbb{R}$. Par exemple, $1 + X^2$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ et pourtant $1 + X^2 = (X + i)(X - i)$.

Théorème 1.3.6 *Si le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$ alors f (ou A) est diagonalisable si, et seulement si, $\dim E_{\lambda_i} = n_{\lambda_i}$ pour tout i.*

Preuve : On a déjà montré que nécessairement,

$$\dim(E_\lambda) \leq n_\lambda.$$

Aussi, on sait que A est diagonalisable si et seulement si E est somme directe de ses espaces propres. Aussi, f est diagonalisable si et seulement si

$$n = \dim(E_{\lambda_1}) + \dim(E_{\lambda_2}) + \ldots + \dim(E_{\lambda_p}).$$

En utilisant le fait que

$$d(P_A(X)) = n = \sum_{i=1}^{p} n_{\lambda_i},$$

on en déduit alors que f est diagonalisable si et seulement si toutes les dimensions d'espace propre sont égales à la multiplicité des valeurs propres. $\square$

Mes corollaires suivants sont des conséquences simples du théorème précédent.

Corollaire 1.3.3 *Si le polynôme caractéristique n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ alors f (ou A) n'est pas diagonalisable.*

Corollaire 1.3.4 *Si le polynôme caractéristique est scindé et n'a que des racines simples, alors f ou A est diagonalisable.*

En réalité, nous avons le critère CNS de diagonalisation d'une matrice

Théorème 1.3.7 *Une matrice réelle A est diagonalisable si et seulement si* ***il existe un polynôme P scindé à racines simples*** *tel que*

$$P(A) = 0.$$

Dans ce cas, il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ et D une matrice diagonale telle que

$$A = Q^{-1}DQ.$$

Preuve : Supposons que f est diagonalisable, alors il existe une base de vecteurs propres de f qu'on peut noter $(e_1, \ldots, e_n)$. Notons l'ensemble des valeurs propres ($p \leq n$) deux à deux distinctes :

$$Sp(f) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$$

Posons $P = \prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i)$. Ce polynôme est scindé à racines simples. On a

$$P(f) = \prod_{i=1}^{p}(f - \lambda_i Id),$$

et on va vérifier que $P(f)$ s'annule sur les éléments de la base des $(e_k)_{1\leq k\leq n}$.

$$P(f)(e_k) = \circ_{j\neq k}(f - \lambda_j Id) \circ (f - \lambda_k Id)(e_k) = 0$$

$P(f)$ étant nul sur une base de l'espace, on en déduit que $P(f)$ est l'endomorphisme nul.

Réciproquement, supposons qu'il existe un polynôme P à racines simples annulant f. On a donc

$$P = a\prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i),$$

avec les λ_i deux à deux distinctes. On peut par ailleurs supposer que $a = 1$ et posons

$$P_j = \prod_{i \neq j} (X - \lambda_i).$$

On constate que les (P_j) sont tous premiers entre eux dans leur ensemble (ils n'ont aucun diviseur commun). Il existe donc d'après l'identité de Bezout p polynômes $(Q_j)_{1 \leq j \leq p}$ tels que

$$Q_1 P_1 + \ldots + Q_p P_p = 1.$$

La traduction en passant aux endomorphismes est

$$(Q_1 \circ P_1 + \ldots + Q_p \circ P_p)(f) = Id.$$

Considérons un élément x de E et appliquons l'égalité précédente, on obtient

$$x = \sum_{j=1}^{p} Q_j \circ P_j(f)(x).$$

On définit $x_j = Q_j \circ P_j(f)(x)$. Comme P annule le polynôme f, on a :

$$(f - \lambda_j Id)(x_j) = (X - \lambda_j)(f)(x_j) = (X - \lambda_j)(f) Q_j \circ P_j(f)(x) = Q_j \circ P(f)(x) = 0$$

Ainsi, x_j est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_j. Ainsi, tout vecteur s'écrit comme somme de vecteurs propres de f et on obtient que E est somme directe de ses espaces propres. La réciproque est donc établie. □

En particulier, le polynôme caractéristique peut ne pas être scindé à racines simples et malgré tout la matrice est diagonalisable. L'exemple le plus évident consiste à considérer $A = I_n$. Le polynôme caractéristique est $P_A(X) = (X - 1)^n$ et 1 est racine d'ordre n. Pourtant, A est bien entendu diagonalisable.

Voici un petit exemple : on considère un endomorphisme f décrit par l'image d'une base de vecteurs :

$$f(e_1) = e_n, f(e_n) = e_{n-1} \ldots f(e_2) = e_1.$$

On constate facilement que $f^n = Id$ donc f est annulée par le polynôme $X^n - 1$. Les racines de ce dernier polynôme sont les racines n-ième de l'unité, elles sont toutes simples. Ainsi, f est diagonalisable.

Enfin, nous conclurons par cette petite proposition.

Proposition 1.3.1 *Soient $A \in GL_n(\mathbb{C}$ et $p \geq 1$. On a l'équivalence : A diagonalisable si et seulement si A^p est diagonalisable.*

Preuve : Supposons que A soit diagonalisable, alors il existe P telle que $A = PDP^{-1}$ et D est une matrice diagonale. La conclusion est alors immédiate en remarquant que $A^p = PD^pP^{-1}$ et D^p est également diagonale.

Réciproquement, supposons que A^p est diagonalisable, cela signifie qu'il existe un polynôme annulateur de A^p scindé à racines simples. Notons ce polynôme $P = (X - \lambda_1) \ldots (X - \lambda_p)$. On sait que A est inversible, donc A^p également et de ce fait les valeurs propres de A^p sont non nulles. Ainsi, le polynôme

$$Q = (X^p - \lambda_1) \ldots (X^p - \lambda_p)$$

est un polynôme annulateur de A puisque $Q(A) = P(A^p)$. Remarquons enfin que Q est nécessairement scindé à racines simples puisque l'équation $X^p - \lambda = 0$ admet p solutions distinctes dès lors que $\lambda \neq 0$. Par conséquent, A est diagonalisable. □

1.4 Au delà de la diagonalisation des matrices réelles

1.4.1 Sortir du corps des réels

Il est légitime de se demander ce qu'on peut faire lorsque les critères de diagonalisation des matrices réelles ne sont pas satisfaits. En particulier, si A est une matrice réelle, elle peut être non diagonalisable dans $\mathbb{R}$ mais diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Par exemple, imaginons que nous voulions réduire la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est égal à

$$P_A(X) = X^3 - X^2 + X - 1 = (X-1)(X^2+1).$$

Les racines de ce polynôme sont $1, i$ et $-i$. A admet dont trois valeurs propres distinctes, mais comme elles ne sont pas toutes réelles, A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

En reprenant tous les résultats énoncés précédemment dans $\mathbb{R}$ et en les transposant dans $\mathbb{C}$, on peut par contre diagonaliser A dans $\mathbb{C}$. Autrement dit il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

On notera que les conditions suffisantes précédentes de diagonalisation restent vraies si on substitue $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$ mais attention, on obtient dans ce cas des résultats de diagonalisation sur $\mathbb{C}$, c'est à dire avec des vecteurs propres et valeurs propres éventuellement complexes.

Attention également à bien prendre garde au caractère **racines simples** qui n'est pas tellement plus facile à obtenir sur $\mathbb{C}$ que sur $\mathbb{R}$. Les corps des nombres complexes assure une décomposition scindée des polynômes qu'on considère, mais la simplicité des racines est « une autre paire de manches ».

1.4.2 Trigonalisation

Il n'est pas toujours sûr qu'une matrice, même vue comme à coefficients complexes, soit diagonalisable. En revanche, peut parfois se ramener à une réduction des matrices un peu moins simples qu'une diagonalisation, mais qui revêt tout de même des intérêts non négligeables comme la trigonalisation.

Définition 1.4.1 (Matrice trigonalisable) *Une matrice réelle A est trigonalisable si il existe une matrice P inversible réelle telle que PAP^{-1} est triangulaire supérieure.*

On a alors la condition nécessaire et suffisante de trigonalisation.

Théorème 1.4.1 (CNS de trigonalisation) *Soit A une matrice carrée.*
i) Une matrice A est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé ***(mais pas nécessairement à racines simples)****.*
ii) Toute matrice A réelle (ou complexe) est trigonalisable dans $\mathbb{C}$.

Preuve de i) : Considérons une matrice A trigonalisable, on sait alors que A est semblable à une matrice triangulaire supérieure :

$$A = PTP^{-1},$$

et remarquons que les propriétés du déterminant impliquent que les polynômes caractéristiques sont identiques : $P_A(X) = P_T(X)$. Comme T est triangulaire supérieure, il est alors facile de calculer son polynôme caractéristique et vérifier qu'il s'écrit :

$$P_T(X) = (t_{1,1} - X) \times \ldots \times (t_{n,n} - X).$$

Par conséquent, P_T est scindé et il en est de même de P_A, qui bien entendu annule A d'après le théorème de Cayley-Hamilton.

Réciproquement, supposons que le polynôme caractéristique de A (ou plutôt celui de l'endomorphisme associé u) soit un polynôme scindé. Nécessairement, on a

$$P_A(X) = (X - \lambda_1) \ldots (X - \lambda_n)$$

avec des racines non nécessairement distinctes. On considère e_1 vecteur propre associé à λ_1 et on complète en une base de E. Dans cette base, la matrice de u s'écrit

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & l \\ 0 & B \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

où B est une matrice carrée de taille $n-1 \times n-1$ et l un vecteur ligne. On vérifie en utilisant un calcul par bloc que

$$P_A(X) = (X - \lambda_1) P_B(X).$$

Naturellement, P_B est scindé également. Nous avons donc établi les bases d'une récurrence très simple sur la dimension pour démontrer ce théorème.

- — La réciproque est vraie poue $\dim E = 1$.
- — Supposons qu'il soit démontré jusqu'à $\dim E = n - 1$ et considérons la dimension n, alors il existe une base où u s'écrit (1.3). Dans cette base, on sait que B est trigonalisable par hypothèse de récurrence donc
$$B = Q\tilde{T}Q^{-1}.$$
Si on considère alors
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix},$$
on constate que P est inversible et un produit matriciel par bloc établit que
$$Mat(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & l \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & l \\ 0 & Q\tilde{T}Q^{-1} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & lQ \\ 0 & \tilde{T} \end{pmatrix} P^{-1}.$$
Ainsi, la matrice précédente est trigonalisable et la propriété de récurrence est héréditaire. □

Preuve de ii) : Notons que toute matrice A réelle ou complexe peut être vue comme complexe. Dans $\mathbb{C}$, tout polynome est naturellement scindé. On applique alors le i) pour conclure. □

1.4.3 Quelques résultats complémentaires

On finit cette partie d'algèbre linéaire en donnant quelques résultats utiles sur les valeurs propres de matrices.

Proposition 1.4.1 (Déterminant, Trace, et valeurs propres) *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les n racines du polynome caractéristique comptées avec leurs ordres de multiplicité. Alors*

i)
$$\det(A) = \lambda_1 \times \ldots \times \lambda_n$$
ii)
$$Tr(A) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$$

Preuve : Les démonstrations de ces deux points s'obtiennent immédiatement en trigonalisant la matrice A dans $\mathbb{C}$ et en calculant soit la trace, soit le déterminant sous forme tridiagonale, ces deux fonctions étant invariantes sur les classes de similitudes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. $\square$

Remarquons enfin que ce dernier résultat est également vrai pour les matrices donc le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$.

1.5 Fiche technique sur les matrices réelles

Le principe pour diagonaliser en pratique une matrice est simple : calculer les espaces propres de la matrice et en déterminer des bases. Notons que sauf théorème préliminaire (polynôme annulateur scindé à racines simples, matrice symétrique réelle, etc...), la diagonalisabilité d'une matrice en pratique s'obtient après le calcul des valeurs propres et des sous-espaces propres et le constat fait sur la dimension de ces espaces. Pour un confort de vocabulaire (et de compréhension), il peut être utile d'avoir une vision vectorielle du problème et d'évoquer l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice. Dans les exemples ci-dessous, la matrice sera notée A et l'endomorphisme canoniquement associé u.

1.5.1 Diagonaliser

Diagonaliser
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
Un calcul montre que $Sp(A) = \{0, 2\}$ avec 2 valeur propre double. On cherche E_0 et E_2 et on trouve que
$$E_0 = Vect((1, -1, 0)^t) \qquad \text{et} \qquad E_2 = Vect((1, 1, 0)^t; (0, 0, 1)).$$
La somme des dimensions est bien 3 et on en déduit que la matrice A est diagonalisable. Pour obtenir la diagonalisation vectorielle, on définit la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ où
$$e_1 = (1, -1, 0)^t \qquad e_2 = (1, 1, 0)^t \qquad e_3 = (0, 0, 1),$$
et nous savons que l'endomorphisme u dans cette base $\mathcal{B}$ s'écrit
$$Mat(u)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
Si on note alors P la matrice de changement de base de la base canonique vers la base $\mathcal{B}$, on a
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Dans ce cas, la formule de changement de base nous dit alors que
$$Mat(u)_{\mathcal{B}} = P^{-1}AP.$$
Une petite remarque : la base $\mathcal{B}$ n'étant pas unique, il y a évidemment plusieurs matrices P qui peuvent convenir. Cependant, la matrice D est elle unique à permutation près.

1.5.2 Trigonaliser

Voici quelques éléments à retenir :

— Pour trigonaliser une matrice, il n'y a pas de méthode globale à connaître a priori.

— La « trigonalisabilité » d'une matrice s'obtient après le calcul de son polynôme caractéristique et le constat que ce polynôme est scindé sur le corps de référence de la matrice (soit $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{C}$).

— Si la matrice est considérée comme matrice complexe, elle est donc toujours trigonalisable.

— On verra les différentes situations pouvant se présenter pour une matrice 3×3.

Exemple 1 On définit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

On trouve $P_A(X) = -(X-1)(X-2)^2$ et les espaces propres sont

$$E_1 = Vect((1,1,1)^t) \qquad \text{et} \qquad E_2 = Vect((0,1,-1)^t).$$

A n'est donc pas diagonalisable. Par contre, P_A est scindé sur $\mathbb{R}$ et A est donc trigonalisable. On va construire une base $\mathcal{B}$ pour laquelle l'endomorphisme associé aura une forme triangulaire. Cette base est construite à partir de $e_1 = (1,1,1)^t$ et $e_2 = (0,1,-1)^t$. Il suffit donc de trouver e_3 qui soit tel que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. Notons que dans cette nouvelle base, la matrice A' cherchée sera nécessairement de la forme

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 2 & * \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

En effet, 1 et 2 sont valeurs propres puis la trace de la matrice A doit être la même que celle de A'. De ce fait, 2 apparaît deux fois sur la diagonale de A' et 1 une seule fois.

Un choix convenable de e_3 est $e_3 = (1,1,0)^t$ et $u(e_3) = 2e_3 - e_2$ de sorte que

$$T = A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice de changement de base P est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Avec de telles définitions, nous avons

$$A = PTP^{-1}.$$

Exemple 2 On définit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice A possède 1 comme valeur propre triple puisque $P_A(X) = (1 - X)^3$. On détermine les espaces propres et trouvons que

$$E_1 = Vect((1,0,0)^t, (0,-1,1)^t).$$

L'espace propre étant de dimension 2, la matrice A n'est pas diagonalisable. Par ailleurs, notons que si elle l'avait été, on aurait en fait eu $A = I_3$, ce qui n'est pas le cas !

Par contre, le polynôme caractéristique est scindé, donc la matrice A est trigonalisable et on commence la trigonalisation en choisissant $e_1 = (1,0,0)^t$ et $e_2 = (0,-1,1)^t$. On choisit alors e_3 tel que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, par exemple $e_3 = (0,1,1)^t$ convient. On a alors $u(e_3) = (0,-1,3)^t = 2e_2 + e_3$. Ainsi, on obtient la matrice de u dans cette base

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin, on écrit la matrice de changement de base et retrouvons la forme factorisée de A.

1.6 Applications

1.6.1 Puissance de matrice - 1

On définit la matrice B comme

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer au travers de sa diagonalisation B^m.

1.6.2 Puissance de matrice - 2

Soit A une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et$P$ un polynôme annulateur de A (par exemple, le polynôme caractéristique). Supposons que l'on veuille calculer les puissances de A à un ordre quelconque k. Alors la division euclidienne [1] assure qu'il existe deux polynômes Q_k et R_k dans $\mathbb{R}[X]$ tels que :

$$X^k = P(X)Q_k(X) + R_k(X)$$

avec $d(R_k) < d(P)$. Bien entendu, le cas qui nous intéressera celui où $k \geq d(P)$.

Comme P annule la matrice A, on en déduit que

$$A_k = P(A)Q_k(A) + R_k(A) = R_k(A).$$

C'est à dire que que toute puissance de A peut se calculer comme une simple combinaison linéaire de puissance de A inférieures au dégré du polynôme P. Ce résultat est surtout utile si on connaît un polynôme annulateur de faible degré (et donc en particulier si on travaille sur des matrices de petite taille).

Voici un exemple d'utilisation : on définit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Se reporter à un ouvrage d'arithmétique pour un rappel de la définition de la division euclidienne

Vérifier que un polynôme annulateur de A (en fait c'est le polynôme caractéristique ici) est

$$P_A(X) = -X(X-1)(X-4).$$

A est donc diagonalisable car ce polynôme annulateur est scindé à racines simples. Par ailleurs, il est clair que ce polynôme est *minimal* en terme de degrés pour annuler la matrice A (se demander pourquoi...).

On considère par la suite un entier $k \geq 3$ et on sait alors que

$$X^k = P_A(X)Q_k(X) + R_k(X). \tag{1.4}$$

Comme P_A est de dégré 3, on sait que R_k est un polynôme de degré au plus 2 et s'écrit

$$R_k(X) = a_k + b_k X + c_k X^2$$

Pour trouver les coefficients (a_k, b_k, c_k), il suffit d'appliquer (1.4) en les racines de P_k pour obtenir le système

$$\begin{cases} 0 & a_k \\ 1 & a_k + b_k + c_k \\ 4^k & a_k + 4b_k + 16c_k \end{cases}$$

On obtient après résolution que

$$A^k = \frac{4^k - 1}{3} A + \frac{4}{3}(1 - 4^{k-2})A^2.$$

1.6.3 Suites récurrentes

On définit les suites $(u_n, v_n, w_n)_{n\geq 1}$ au travers de $(u_0, v_0, w_0) \in \mathbb{R}^3$ et

$$u_{n+1} = -u_n + v_n + w_n, \quad v_{n+1} = u_n - v_n + w_n, \quad w_{n+1} = u_n + v_n - w_n$$

Donner le terme général des suites $(u_n)_{n\geq 1}, (v_n)_{n\geq 1}$ et $(w_n)_{n\geq 1}$.

1.6.4 Système différentiel

Résoudre le système différentiel

$$x'(t) = -x(t) + y(t) + z(t), \quad y'(t) = x(t) - y(t) + z(t), \quad z'(t) = x(t) + y(t) - z(t).$$

Chapitre 2

Compléments d'Algèbre - Algèbre bilinéaire et formes quadratiques

2.1 Rappels élémentaires sur les formes bilinéaires

2.1.1 Définitions

On considère Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension n et φ une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$. On dit que φ est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}$ si elle est linéaire par rapport à chacune de ses composantes. Autrement dit, φ est bilinéaire si

$$\forall (x, y, z) \in E^3 \quad \forall (\lambda, \beta) \in \mathbb{R}^2 \qquad \varphi(\lambda x + \beta y, z) = \lambda \varphi(x, z) + \beta \varphi(y, z)$$

et

$$\varphi(z, \lambda x + \beta y) = \lambda \varphi(z, x) + \beta \varphi(z, y)$$

Il est commode d'associer à cette notion de forme bilinéaire une notation matricielle. Celle-ci est donnée au travers de la base canonique : étant donné $X = (x_1, \ldots, x_n)^t$ et $Y = (y_1, \ldots, y_n)^t$, on a

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{i=1}^{n} y_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \varphi(e_i, e_j) = X^t A Y,$$

où la matrice A est la matrice de la forme bilinéaire φ donnée par

$$\forall (i, j) \in \{1, \ldots n\}^2 \qquad A_{i,j} = \varphi(e_i, e_j).$$

Attention toutefois à ne pas confondre la matrice A de la forme bilinéaire φ avec celle d'une l'application linéaire !

Voici un exemple simple :

$$\varphi_1(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

On vérifiera que φ_1 est bilinéaire (qui plus est symétrique ici) et que

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un exemple d'écriture un tout petit peu plus compliqué est donné par

$$\varphi_2(x, y) = x_1 y_1 - x_2 y_2 + x_3 y_3 + (x_1 y_2 + x_2 y_1) - 3(x_1 y_3 + x_3 y_1).$$

Ici, l'écriture matricielle est donnée par

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un dernier exemple :

$$\varphi_3(x, y) = 2x_1y_1 - x_2y_1 + 3x_1y_2 + x_2y_2$$

dont la matrice est donnée par

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi_3) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.1.2 Changement de base

On observera que la valeur de $\varphi(x, y)$ est exactement donnée par la valeur renvoyée par la multiplication matricielle X^tAY. Ainsi, le changement de base pour le vecteur x et le vecteur y affecte naturellement cette écriture, et donc la matrice de φ dans une nouvelle base.

Plus précisément, si X désigne l'écriture de x dans la base canonique et $\tilde{X}$ est son écriture dans une autre base avec $X = P\tilde{X}$ en notant $P = P_{\mathcal{B}\mapsto\mathcal{C}}$, alors

$$X^tAY = \{P\tilde{X}\}^tA\{P\tilde{Y}\} = \tilde{X}^tP^tAP\tilde{Y}.$$

Cela signifie que la matrice de φ dans la base $\mathcal{C}$ est donnée au travers de la relation

$$M_{\mathcal{C}}(\varphi) = P^t_{\mathcal{B}\mapsto\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}(\varphi)P_{\mathcal{B}\mapsto\mathcal{C}}.$$

Voici un exemple : on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$ avec

$$v_1 = e_1, \quad v_2 = e_1 - e_2, \quad v_3 = e_1 + e_2 + e_3.$$

On a alors

$$P_{\mathcal{B}\mapsto\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de φ_1 dans la base $\mathcal{C}$ est alors donnée par

$$M_{\mathcal{C}}(\varphi_1) = P^t_{\mathcal{B}\mapsto\mathcal{C}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P_{\mathcal{B}\mapsto\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.1.3 Formes bilinéaires symétriques

Une forme bilinéaire est dite symétrique si

$$\forall (x, y) \in E^2 \qquad \varphi(x, y) = \varphi(y, x).$$

La forme quadratique associée Q est donnée par

$$Q(x) = \varphi(x, x).$$

Proposition 2.1.1 (Identité de polarisation) *Si φ est une forme bilinéaire symétrique de forme quadratique Q, alors*

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\left[Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\right].$$

Preuve : La démonstration repose simplement sur le calcul de $Q(x+y)$ en utilisant la symétrie de φ :

$$Q(x+y) = \varphi(x+y, x+y) = \varphi(x,x) + \varphi(y,y) + 2\varphi(x,y) = Q(x) + Q(y) + 2\varphi(x,y).$$

$\square$

Par ailleurs, on constatera que le rôle de la symétrie est particulièrement "explicite" au travers de la proposition suivante qui se démontre en écrivant la définition de la matrice de la forme bilinéaire φ.

Proposition 2.1.2 *φ est symétrique si et seulement si sa matrice (dans toute base) est symétrique.*

Ainsi, dans les exemples précédents, φ_1 et φ_2 sont symétriques alors que φ_3 non.
Par ailleurs La forme quadratique associée à φ_1 est

$$Q_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Celle associée à φ_2 est

$$Q_2(x) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 6x_1x_3.$$

Définition 2.1.1 (Positivité) *On dira que Q est positive si*

$$\forall x \in E \qquad Q(x) \geq 0.$$

Elle sera définie positive si

$$\forall x \in E \quad x \neq 0 \Longrightarrow Q(x) > 0.$$

On a alors extension de ces définitions de positivité et définie positivité aux matrices symétriques réelles. De plus, on a le résultat fondamental suivant qui est quasiment tautologique.

Théorème 2.1.1 *Une matrice Q est symétrique définie positive si et seulement si φ la forme bilinéaire associée est un produit scalaire.*

— Il est clair à la vue de l'écriture de Q_1 que Q_1 est définie positive. On reconnaîtra dans cette écriture la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^3$ tandis que φ_1 désigne en fait le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^3$.

— Pour φ_2 (ou Q_2), cette positivité est moins nette. En réalité, on peut écrire Q_2 sous forme de "somme et différence de carrés" *via*

$$Q_2(x) = (x_1 + x_2 - 3x_3)^2 - 2(x_2 - \frac{3}{2}x_3)^2 - \frac{7}{3}x_3^2.$$

Cette écriture permet immédiatement de constater que Q_2 n'est pas positive (prendre $x_3 \neq 0$ et $x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$ et $x_2 - 3/2x_3 = 0$).

2.1.4 Réduction de Gauss des formes quadratiques

La méthode appliquée précédemment est valable pour toute forme bilinéaire symétrique, en dimension quelconque, et s'appelle la méthode de Gauss. Le principe est simple : on commence par isoler tous les termes contenant x_1 et à les mettre dans un carré. On fait ensuite de même pour les termes contenant x_2 , et ainsi de suite.

Toute forme quadratique associée à une forme bilinéaire symétrique peut ainsi s'écrire sous forme d'une somme de carrés pondérés par des scalaires ; la forme quadratique sera positive si et seulement si tous ces scalaires sont positifs.

Théorème 2.1.2 (Réduction d'une forme quadratique en somme de carrés) *Si φ est une forme bilinéaire symétrique et Q la forme quadratique associée sur E, alors il existe une base $\mathcal{V} = (v_1, \ldots, v_n)$ de E dans laquelle Q s'écrit comme somme de carrés : il existe n réels $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ tels que*

$$\forall x \in E \quad x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \qquad \Longrightarrow \qquad Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2$$

Par ailleurs, le nombre de coefficients α_i positifs (resp. nuls et négatifs) ne dépend pas de la base choisie.

Nous ne donnerons pas de démonstration de ce résultat qui est en réalité assez clair d'un point de vue algorithmique.
Il est relativement immédiat que la décomposition en somme de carrés de Gauss permet de donner des informations sur la forme quadratique en question. Elle est dégénérée si un des coefficients α_i est nul, elle est positive si tous les coefficients α_i sont positifs ou nuls. Elle est définie positive si tous les coefficients α_i sont strictement positifs.

Définition 2.1.2 (Signature d'une forme quadratique) *Dans cette décomposition de Gauss, on appellera signature de la forme quadratique Q la paire d'entiers $(p, r-p)$ où r est le rang de la forme quadratique et p le nombre de coefficients positifs. Le rang est le nombre de coefficients $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ non nuls.*

Nous énonçons ici un résultat simple dont la démonstration l'est tout autant :

Proposition 2.1.3 *Une matrice A symétrique définie positive est nécessairement inversible.*

<u>Preuve :</u> Si la matrice A n'est pas inversible, alors il existe $X \neq 0$ tel que l'on a $AX \neq 0$. Dans ce cas, on remarque que $X^t AX = 0$, et que A ne peut être définie positive. □

2.1.5 Inégalités

On rappelle ici les deux inégalités fondamentales associées aux formes quadratiques rencontrées dans les "petites classes".

Proposition 2.1.4 (Inégalité de Cauchy Schwarz) *Soit φ une forme bilinéaire symétrique positive, alors*

$$\forall (x,y) \in E^2 \qquad |\varphi(x,y)| \leq \sqrt{\varphi(x,x)}\sqrt{\varphi(y,y)}$$

Par ailleurs, en cas d'égalité, les deux vecteurs sont colinéaires.

Preuve : Donnons nous $(x,y) \in E^2$ et λ un réel quelconque. On sait que

$$Q(x+\lambda y) \geq 0 \qquad \text{car la forme bilinéaire associée au produit scalaire est positive.}$$

Par conséquent, on a

$$P_{x,y}(\lambda) := Q(x) + 2\lambda\varphi(x,y) + \lambda^2 Q(y) \geq 0.$$

Le polynôme $P_{x,y}$ de la variable λ est du deuxième degré et est toujours positif. Ainsi, son discriminant est négatif (car il ne peut avoir deux racines réelles distinctes). Cela signifie donc que

$$4\varphi(x,y)^2 - 4Q(x)Q(y) \leq 0.$$

Cette dernière inégalité est équivalente à

$$|\varphi(x,y)| \leq \sqrt{\varphi(x,x)}\sqrt{\varphi(y,y)}.$$

Enfin, remarquons que le cas d'égalité peut être étudié : si

$$|\varphi(x,y)| = \sqrt{\varphi(x,x)}\sqrt{\varphi(y,y)},$$

alors le polynôme $P_{x,y}$ admet une racine réelle double :

$$\exists !\lambda_0 \quad |Q(x+\lambda_0 y) = 0.$$

Comme Q est définie positive, cela signifie que $x + \lambda_0 y = 0$, donc que x et y sont liés. □ Voici deux exemples d'applications :

— Une première inégalité simple qu'il serait pénible de vérifier sans utiliser le théorème de Cauchy-Schwarz :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \qquad (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2).$$

— Une seconde moins évidente (ce n'est qu'un exemple parmi d'autres) : On considère une suite de réels $(x_1, \ldots, x_n)$ strictement positifs et on construit

$$u_p = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^p}{\sum_{i=1}^n x_i^{p+1}}.$$

La suite (u_p) est décroissante et convergente vers une limite (la déterminer !).

Une conséquence classique de l'inégalité de Cauchy-Schwarz est la seconde inégalité

Proposition 2.1.5 (Inégalité de Minkowski - Inégalité de la norme) *Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur E, alors*

$$\forall (x,y) \in E^2 \qquad \sqrt{\varphi(x+y,x+y)} \leq \sqrt{\varphi(x,x)} + \sqrt{\varphi(y,y)}$$

Preuve : Il suffit d'élever au carré les deux termes de l'inégalité (termes qui sont nécessairement positifs) et appliquer ensuite l'inégalité de Cauchy-Schwarz. □

2.2 Orthogonalité

2.2.1 Définitions

Soit E un espace euclidien et $(.|.)$ le produit scalaire associé. On dit que deux vecteurs x et y sont orthogonaux si $(x|y) = \varphi(x,y) = 0$.

Par exemple, plaçons nous dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel. Les deux vecteurs x et y, de coordonnées $(2,4,-7)^t$ et $(-3,5,2)^t$ dans la base canonique, sont orthogonaux pour le produit scalaire usuel car :

$$(x|y) = 2 \times (-3) + 4 \times 5 + (-7) \times 2 = 0.$$

Attention ! La notion d'orthogonalité dépend du produit scalaire considéré : deux éléments orthogonaux pour un produit scalaire ne le sont pas forcément pour un autre.

Rappelons le théorème de Pythagore dédié à une forme quadratique Q :

$$\varphi(x,y) = 0 \Longleftrightarrow Q(x) + Q(y) = Q(x+y).$$

Cette dernière formule s'étend aux familles orthogonales, une telle famille de vecteurs $(u_1, \ldots u_p)$ étant une famille de vecteurs 2 à 2 orthogonaux.

Définition 2.2.1 (Supplémentaire orthogonal) *Étant donné un sous-espace vectoriel F de E, on note $F^\perp$ l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les éléments de F. On remarquera que $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E et que $F \oplus F^\perp = E$.*

La définition/proposition précédente implique ensuite la relation importante

$$n = \dim(F) + \dim(F^\perp).$$

Exemple : φ f.b.s. de forme quadratique

$$Q(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + x_2^2.$$

On remarque que Q est bien définie positive et que φ est un produit scalaire. Étant donné e_1 le premier vecteur de la base canonique, un vecteur orthogonal à e_1 pour le produit scalaire défini par φ vérifie

$$\varphi(e_1, x) = 0.$$

Cependant, la matrice de φ est donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si x orthogonal à e_1 pour ce produit scalaire, alors nécessairement $x_1 - x_2 = 0$. Ainsi, $e_1 + e_2$ est orthogonal à e_1 pour φ. Notons que bien entendu, cette orthogonalité n'a pas lieu pour le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^2$.

2.2.2 Algorithme de Gram-Schmidt

Le résultat qui suit est très important, aussi bien sur le plan théorique (nous verrons ensuite des propriétés qui en découlent) que pratique pour la construction d'une base orthonormée.

Théorème 2.2.1 (Théorème de Gram-Schmidt) *Tout espace euclidien E muni du produit scalaire $(|)$ et de la norme $\|.\|$ admet une base orthonormée.*

La démonstration est "constructive" au sens où elle construit algorithmiquement la base orthonormée recherchée. Il convient donc de retenir cette preuve pour être capable de trouver des bases orthonormées. Cet algorithme est l'algorithme de Gram-Schmidt.

Preuve : E étant de dimension finie n, nous pouvons considérer $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et cherchons $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ qui soit une base orthonormale de E. Pour ce faire, on initiale l'algorithme avec

$$f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}.$$

On cherche ensuite $\tilde{f}_2$ orthogonal à f_1. On se convainc assez facilement que considérer $\tilde{f}_2 = e_2 + \alpha f_1$ permet de trouver α pour que $(\tilde{f}_2|f_1) = 0$. En effet, on peut calculer

$$(\tilde{f}_2|f_1) = (e_2|f_1) + \alpha,$$

et la condition d'orthogonalité est vérifiée si $\alpha = -(e_2|f_1)$. Il suffit alors de considérer

$$f_2 = \frac{\tilde{f}_2}{\|\tilde{f}_2\|}.$$

On va alors poursuivre la construction par récurrence. Supposons que $\mathcal{C}_p = (f_1, \ldots, f_p)$ soit une famille orthonormale ainsi construite jusqu'à l'étape p, on cherche alors

$$\tilde{f}_{p+1} = e_{p+1} + \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_p f_p.$$

Nous savons déjà que $\mathcal{C}_p$ est orthonormale et pour que $\mathcal{C}_{p+1}$ le soit, il faut vérifier que

$$(\tilde{f}_{p+1}|f_j) = 0, \forall 1 \leq j \leq p.$$

Cette dernière condition est équivalente à

$$\alpha_1 = -(e_{p+1}|f_1), \ldots \alpha_p = -(e_{p+1}|f_p).$$

On obtient alors f_{p+1} en normalisant $\tilde{f}_{p+1}$. Cela achève alors la démonstration puisque par construction, à l'étape $p = n$, la famille $\mathcal{C}_n$ est orthonormale dans un espace de dimension n, donc est une base orthonormale de E.

$\square$

On notera que la construction de la base $\mathcal{C}$ à partir de la base $\mathcal{B}$ aboutit à une matrice de passage triangulaire supérieure. Cela amène alors au théorème suivant de décomposition des matrices inversibles :

Théorème 2.2.2 *Toute matrice inversible $M \in GL_n(\mathbb{R})$ se décompose en*

$$M = QR,$$

où Q est une matrice orthonormale ($Q^t Q = I_n$) et R est triangulaire supérieure avec des coefficients strictement positifs sur sa diagonale.

La décomposition s'obtient simplement en interprétant R comme un changement de base (celle donnée par les vecteurs colonnes de M) en une base orthonormée.

2.3 Diagonalisation des matrices symétriques réelles

Remarquons qu'une matrice réelle n'a pas forcément de valeurs propres réelles : par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a pour valeurs propres i et $-i$. Nous allons étudier le cas trèes spécifique des matrices symétriques réelles. Ces matrices rentrent dans un cadre plus général d'endomorphismes auto-adjoints pour un espace euclidien quelconque. Nous montrerons en particulier qu'une matrice symétrique réelle a toutes ses valeurs propres réelles et est diagonalisable dans une base orthonormée (théorème spectral).

Définition 2.3.1 (Applications symétriques) *Étant donné un espace euclidien E défini par un produit scalaire $(|)$, on dit que f est symétrique dans E si elle vérifie :*

$$\forall (x, y) \in E^2 \qquad (f(x)|y) = (x|f(y))$$

On peut également parler d'endomorphismes auto-adjoints (égaux à leur propre adjoint) puisque l'adjoint de f généralement noté f^* est défini au travers de la relation de dualité : f^* est l'unique endomorphisme tel que

$$\forall (x, y) \in E^2 \qquad (f(x)|y) = (x|f^*(y)).$$

Un résultat simple est que la matrice de l'adjoint dans une base orthonormée pour le produit scalaire de E s'obtient en transposant la matrice de l'application initiale (on considère ici des matrices réelles). De même, dans le cas hermitien (complexe), l'adjoint dans une base orthonormée de E s'obtient en utilisant la trans-conjuguée.
On peut alors démontrer le premier résultat

Proposition 2.3.1 *Toutes les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle sont réelles.*

<u>Preuve :</u> Pour démontrer ce résultat, on considère une valeur propre de A qui est éventuellement complexe. Il existe donc un vecteur propre éventuellement à coefficient complexe tel que

$$AV = \lambda V.$$

Par ailleurs, nous savons en passant au conjugué que

$$\overline{AV} = \bar{\lambda}\bar{V} = A\bar{V},$$

car la matrice A est réelle. On calcule alors de deux façons différentes le produit scalaire $V^t A\bar{V}$: d'une part

$$V^t(A\bar{V}) = V^t A\bar{V} = V^t\bar{\lambda}\bar{V} = \bar{\lambda}V^t\bar{V}.$$

On utilise alors la symétrie de A :

$$V^t(A\bar{V}) = (V^t A)\bar{V} = (V^t A^t)\bar{V} = (AV)^t\bar{V} = \lambda V^t\bar{V}.$$

On vient donc d'établir que

$$\lambda\|V\|_2^2 = \bar{\lambda}\|V\|_2^2.$$

Cela permet de conclure que λ est en réalité réel. □

De plus, on a le résultat fondamental suivant. Notons que sa démonstration ne repose aucunement sur des considérations arithmétiques de polynôme d'endomorphisme.

Théorème 2.3.1 (Théorème spectral) *Toute matrice symétrique réelle M est diagonalisable en base orthonormée : il existe P orthonormale réelle telle que*

$$M = P^t D P \qquad \text{avec} \qquad P^t = P^{-1}.$$

Preuve :

Une démonstration simple d'un tel résultat fait appel aux méthodes variationnelles. Il s'agit de démontrer dans un premier temps d'existence d'un vecteur propre par maximisation d'une fonctions sur la boule unité, puis de passer au supplémentaire orthogonal qui est stable par l'endomorphisme symétrique.

Existence d'une valeur propre réelle de M : On munit $E = \mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne usuelle et on considère sa sphère unité

$$S^{n-1} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n | \|x\|_2^2 = 1 \right\}.$$

Nous verrons ultérieurement sur S^{n-1} est un compact de $\mathbb{R}^n$ puisque cet ensemble est fermé et borné. Nous considérons alors la fonction

$$\psi : x \in \mathbb{R}^n \longmapsto x^t M x = (x|Mx) = (Mx|x).$$

Cette fonction ψ est continue (polynôme du second degré en les coordonnées $x_1, \ldots, x_n$) et par conséquent, ψ atteint son maximum λ en un point $x_0 \in S^{n-1}$:

$$\forall x \in S^{n-1} \qquad \psi(x) = (x|Mx) \le \lambda = (x_0|Mx_0).$$

En particulier, nous obtenons l'inégalité importante suivante (le point $x/\|x\|$ étant dans S^{n-1}) :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \left(\frac{Mx}{\|x\|} | \frac{Mx}{\|x\|} \right) \le \lambda.$$

Cela signifie donc que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \qquad (Mx|x) \le \lambda(x|x). \tag{2.1}$$

Considérons v un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$ et $t \in \mathbb{R}$. On a d'une part en développant que :

$$\psi(x_0 + tv) = (Mx_0|x_0) + t(Mx_0|v) + t(x_0|Mv) + t^2(Mv|v).$$

La matrice M étant symétrique, il vient que

$$\psi(x_0 + tv) = \psi(x_0) + 2t(Mx_0|v) + t^2(Mv|v)$$

D'autre part, on a :

$$\lambda\|x_0 + tv\|_2^2 = \lambda\|x_0\|_2^2 + 2t(\lambda x_0|v) + t^2(\lambda v|v) = \lambda + 2t(\lambda x_0|v) + t^2(\lambda v|v).$$

On obtient donc de (2.1) que

$$\begin{aligned}
\psi(x_0 + tv) \le \lambda\|x_0 + tv\|_2^2 \iff\ & (Mx_0|x_0) + 2t(Mx_0|v) + t^2(Mv|v) \le \lambda + 2t(\lambda x_0|v) + t^2(\lambda v|v) \\
\iff\ & \lambda + 2t(Mx_0|v) + t^2(Mv|v) \le \lambda + 2t(\lambda x_0|v) + t^2(\lambda v|v) \\
\iff\ & 2t(Mx_0 - \lambda x_0|v) \le t^2(\lambda v - Mv|v)
\end{aligned}$$

La dernière inégalité étant vraie au voisinage de $t = 0$, on en déduit alors que nécessairement le terme de gauche est nul car au voisinage de 0, t varie plus vite que t^2. Ainsi, on obtient que

$$\forall v \in \mathbb{R}^n \qquad (Mx_0 - \lambda x_0|v) = 0.$$

Cela signifie donc que $Mx_0 = \lambda x_0$, c'est-à-dire que x_0 est un vecteur propre de M associé à la valeur propre λ. Cette valeur propre λ est également le maximum de ψ sur la sphère unité.

Démonstration de la diagonalisation : Nous pouvons désormais revenir à l'étude de la diagonalisation de M et nous allons démontrer ce résultat par récurrence sur n, la dimension de l'espace ambiant. La propriété est bien entendue vraie si $n = 1$. Supposons qu'elle le soit jusqu'à l'entier $n-1$ et donnons nous M symétrique réelle de taille $n \times n$ dont l'endomorphisme associé est noté u. D'après le point précédent, il existe un vecteur propre f_1 associé à la valeur propre λ_1. On peut bien entendu considérer que f_1 est un vecteur de norme 1, quitte à la normaliser.

Considérons $E_1 = \{\mathbb{R}f_1\}^\perp$ et démontrons que c'est un espace stable par u :

$$\forall x \in E_1 \qquad (u(x)|f_1) = (x|u^*(f_1)) = (x|u(f_1)) = \lambda(x|f_1) = 0.$$

La restriction de u à l'espace E_1 est un endomorphisme symétrique réel, dont l'espace ambiant est $n-1$. On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence au rang $n-1$ et conclure que u_1 se diagonalise en b.o.n., c'est-à-dire qu'il existe une base $(f_2, \ldots, f_n)$ de E_1 telle que tous les $(f_j)_{2 \leq j \leq n}$ sont orthogonaux 2 à 2 et sont vecteurs propres de u_1. La conclusion s'en suit en considérant $\mathcal{B} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ qui est encore une b.o.n. de E formée uniquement de vecteurs propres de u. L'hérédité de la récurrence est donc démontrée et cela conclut la démonstration de ce théorème. □

On conclut avec un théorème fort pratique de diagonalisation simultanée de matrices qui n'est qu'une reproduction dans un contexte plus général du résultat précédent.

Théorème 2.3.2 *Soient E un espace euclidien muni d'un produit scalaire $(.|.)$ et Q une forme quadratique arbitraire de E. On note φ sa forme polaire et $\mathcal{B}_0$ une b.o.n. de E et u l'endomorphisme associé à la matrice de φ notée A dans $\mathcal{B}_0$. Alors, il existe une base $\mathcal{B} = (f_1, \ldots, f_n)$ orthonormée pour $(|)$ et formée de vecteurs propres de u :*

$$\forall i \in \{1, \ldots n\} \qquad u(f_i) = \lambda_i f_i.$$

Si on note P la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ dans $\mathcal{B}$, alors P est orthogonale : $P^t = P^{-1}$ et on a

$$D = P^{-1}AP.$$

Ce théorème est appelé "théorème de réduction simultanée" ou "de diagonalisation simultanée" car la base $\mathcal{B}$ donnée par l'énoncé est à la fois orthonormée pour $(|)$ et orthogonale pour φ.

On retiendra en particulier le corollaire intéressant en terme matriciel.

Corollaire 2.3.1 *Soit S une matrice symétrique réelle et A une matrice symétrique définie positive, alors il existe une matrice P inversible et une matrice diagonale D telle que*

$$A = P^tP \qquad et \qquad S = P^tDP.$$

Notez bien l'importance de l'hypothèse matrice symétrique définie positive dans le précédent corollaire, ceci afin de manipuler un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. Le théorème est faux si on oublie ne serait-ce que l'aspect "défini".

Chapitre 3

Compléments d'analyse : espaces vectoriels normés

3.1 Espaces métriques

3.1.1 Distance

On rappelle rapidement la définition de distance.

Définition 3.1.1 (Distance) *d est une distance sur un ensemble E si c'est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que*
- *d est symétrique : $d(x,y) = d(y,x)$.*
- *d sépare les points : $x \neq y \Longleftrightarrow d(x,y) > 0$.*
- *d satisfait l'inégalité triangulaire*

Voici quelques exemples simplistes :
- $d(x,y) = \delta_{x,y}$ où δ est le symbole de Kronecker.
- $d(x,y) = |x-y|$
- $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$.

3.1.2 Cas des espaces L_p

Voici des exemples un tout petit peu moins simplistes :
- $d(f,g) = \left(\int_0^1 |f-g|^p\right)^{1/p}$, pour tout $p \geq 1$ où $(f,g) \in L^p(\mathbb{R})$.
- La distance dérivée de la norme infinie sur l'espace des fonctions continues d'un intervalle I :
$$d(f,g) = \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)|.$$
- On peut également citer les exemples avec les suites de réels :
$$d(u,v) = \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |u_n - v_n|^p\right)^{1/p}, \qquad \forall (u,v) \in \ell^p(\mathbb{N}).$$

Dans les derniers exemples faisant intervenir les normes $\|.\|_p$, le point non trivial provient de la question de l'inégalité triangulaire. Celle-ci est assurée par le résultat suivant.

Théorème 3.1.1 *Soit f et g deux fonctions de l'espace $L^p(I)$ où $I = [0,1]$ pour $p \geq 1$, alors*
$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Preuve : Nous allons démontrer ce résultat en admettant dans un premier temps l'inégalité de Hölder, à savoir

$$f \in L_p(I) \,\text{et}\, g \in L_{p'}(I) \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \Longrightarrow \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'} \tag{3.1}$$

On se donne donc f et g de $L_p(I)$ et par inégalité triangulaire :

$$\|f+g\|_p^p = \int_0^1 |f+g|^p(x)dx \leq \int_0^1 (|f|+|g|)(x)|f+g|(x)^{p-1}dx.$$

Puis, en distribuant on a

$$\|f+g\|_p^p \leq \int_0^1 |f|(x)|f+g|(x)^{p-1}dx + \int_0^1 |g|(x)|f+g|(x)^{p-1}dx$$

On appliquera alors l'inégalité de Hölder (3.1) à $f \in L^p$ et $(f+g)^{p-1} \in L^{p'}$.

— Pour cela, il faut préalablement démontrer que $(f+g)^{p-1} \in L_{p'}$. On vérifie en effet que $1/p + 1/p' = 1 \Longleftrightarrow p' = \frac{p}{p-1}$ puis

$$\left(|f+g|^{p-1}\right)^{p'} \leq \left(2^{p-1}\left(|f|^{p-1} + |g|^{p-1}\right)\right)^{p'} \leq 2^{(p-1)p'}\left(|f|^{(p-1)p'} + |g|^{(p-1)p'}\right)$$

Les termes de droites sont respectivement égaux à $|f|^p$ et $|g|^p$ en raison de la relation entre p et p'. D'où l'appartenance de $(f+g)^{p-1}$ à l'espace $L_{p'}(I)$.

— On applique (3.1) et on obtient

$$\int \|f+g\|_p^p \leq \|f\|_p \|(f+g)^{p-1}\|_{p'} + \|g\|_p \|(f+g)^{p-1}\|_{p'}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \|(f+g)^{p-1}\|_{p'} &= \left(\int_0^1 |f+g|^{(p-1)p'}\right)^{1/p'} && (3.2) \\ &= \left(\int_0^1 |f+g|^p\right)^{1-1/p}. && (3.3) \end{aligned}$$

D'où

$$\|f+g\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \frac{\|f+g\|_p^p}{\|f+g\|_p}.$$

On obtient alors l'inégalité recherché en regroupant les termes $\|f+g\|_p$ dans le membre de gauche de l'inégalité.

□ Afin de compléter la démonstration, nous revenons à (3.1) dans le Lemme suivant.

Lemme 3.1.1 *Si $f \in L_p(I)$ et $g \in L_{p'}(I)$ avec $1/p + 1/p' = 1$, alors $fg \in L_1(I)$ et*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Preuve : On remarque qu'on peut considérer les situations où $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$ quitte à renormaliser ensuite. On considère $\alpha = 1/p$ et $\beta = 1/p'$ et l'inégalité arithmético-géométrique montre que

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}_+^2 \qquad u^\alpha v^\beta \leq \alpha u + \beta v.$$

Cette dernière inégalité se démontre facilement en prenant le logarithme des deux expressions précédentes, logarithme qui est une fonction concave.

Ensuite, on considère $u = |f(x)^p|$ et $v = |g(x)|^{p'}$, on obtient alors

$$\int_0^1 |f(x)^p|^{1/p}|g(x)^{p'}|^{1/p'}dx \leq \int_0^1 \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{p'}|g(x)|^{1/p'}dx = \alpha + \beta = 1.$$

□

Proposition 3.1.1 *Si d est une distance sur E, alors une inégalité classique est l'inégalité triangulaire inverse :*

$$d(x, y) \geq |d(x, z) - d(z, y)|,$$

valable pour tous x, y, z dans E.

Preuve : La démonstration repose sur deux inégalités triangulaires : d'une part on a

$$d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z) \Longrightarrow d(x, y) \geq d(x, z) - d(y, z).$$

D'autre part,

$$d(x, y) + d(x, z) \geq d(y, z) \Longrightarrow d(x, y) \geq d(y, z) - d(x, z).$$

La suite s'en suit en prenant les valeurs absolues dans les termes de droite précédents.

□

Définition 3.1.2 (Espace métrique) *Un espace métrique est un ensemble E muni d'une distance d.*

Par abus, nous noterons souvent E le couple (E, d), en notant plus précisément d_E la distance de E si nécessaire (le contexte aidant, d désignera par défaut la distance de tout espace métrique considéré).

Définition 3.1.3 (Isométrie) *Une application $f : E \to F$ entre deux espaces métriques est isométrique si*

$$\forall (x, y) \in E^2 \qquad d(f(x), f(y)) = d(x, y).$$

Une application isométrique étant clairement injective, on parlera aussi d'injection (ou plongement) isométrique. Une *isométrie* entre deux espaces métriques est une bijection qui est une application isométrique ; son inverse est alors aussi une application isométrique. Deux espaces métriques E et F sont isométriques s'il existe une isométrie de E dans F .

3.1.3 Norme

Une notion intimement associée à la notion de distance est la notion de norme sur un espace vectoriel. Notez que cette norme n'est pas nécessairement dérivée d'un produit scalaire et que en toute généralité, elle est définit ainsi.

Définition 3.1.4 (Norme) *Une norme sur un espace vectoriel est une application $\|.\|$ de E dans $\mathbb{R}^+$ telle que*

— $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
— $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$
— $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

On constatera qu'on définit une distance à partir d'une norme. L'inverse n'est pas vrai en toute généralité (il existe des contre-exemples dans certains espaces fonctionnels).

Rappelons enfin les deux inégalités fondamentales déjà vues dans le chapitre précédent.

Proposition 3.1.2 (Inégalité de Cauchy Schwarz) *Soit $\|.\|$ une norme dérivée d'un produit scalaire, alors*

$$\forall (x,y) \in E^2 \qquad |\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \times \|y\|$$

Proposition 3.1.3 (Inégalité de Minkowski - Inégalité de la norme) *Soit $\|.\|$ une norme dérivée d'un produit scalaire, alors*

$$\forall (x,y) \in E^2 \qquad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

On dira que (E,d) est un espace métrisé tandis que $(E,\|.\|)$ est un espace vectoriel normé (e.v.n.). Notamment, sur $(E,\|.\|)$, nous allons étudier des notions topologiques importantes.

On termine par quelques exemples simples.

— Si f est une application inversible de $GL(E)$ et si $\|.\|$ est une norme sur E, alors $N(x) := \|f(x)\|$ est une norme de E.

— Si $\|.\|$ est une norme, alors on a l'inégalité

$$\|x-y\| \geq \frac{1}{2} \max\{\|x\|, \|y\|\} \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|.$$

3.1.4 Boules

Boules La première définition fondamentale est donnée par la notion de boules ouvertes ou fermées puisque c'est au travers de cette définition que nous définirons ce qu'on appelle la *topologie* de l'e.v.n.

Définition 3.1.5 (Boules) *Dans un espace métrique, on définit la boule ouverte $B(x,r)$ par*

$$B(x,r) = \{y \in E \quad | \quad d(x,y) < r\}.$$

La boule fermée est alors

$$\bar{B}(x,r) = \{y \in E \quad | \quad d(x,y) \leq r\}.$$

Enfin, la sphère est bien sûr l'ensemble des points à distance exactement égale à r.

Ouverts, fermés Ces notions de boules nous permettent alors de définir les ouverts et fermés de (E,d).

Définition 3.1.6 (Ouverts, Fermés) *Un ensemble O est ouvert dans E si pour tout point x de E, il existe $r > 0$ tel que*

$$B(x,r) \subset O.$$

Un ensemble F est fermé si son complémentaire dans E est ouvert.

On énonce rapidement un ensemble de proposition fournissant des propriétés d'ouverts ou fermés.

Proposition 3.1.4 *Soit I un ensemble d'indices et $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts, $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés, alors*

i) L'union des U_i est ouverte.

ii) Si I est fini, alors l'intersection des U_i est ouverte.
iii) L'intersection des F_i est fermée.
iv) Si I est fini, alors l'union des F_i est fermée.

Preuve : La démonstration du i) est équivalente à celle du iii) par passage au complémentaire. Soit un ensemble d'ouverts O_i et donnons nous un élément $x \in \cup O_i$. On a alors par définition de l'union :

$$\exists i_0 \in I \qquad x \in O_{i_0}.$$

Comme O_{i_0} est ouvert, on sait alors qu'il contient une boule centrée en x de rayon $r > 0$ assez petit. Aussi, cette boule est dans $\cup_{i \in I} O_i$.

La démonstration de ii) est équivalente à celle du iv), toujours par passage au complémentaire. Donnons nous $x \in \cap_{i=1}^p O_i$. Comme chaque O_i est ouvert, il existe r_i un rayon de boule centrée en x tel que $B(x, r_i) \subset O_i$. Il suffit alors de considérer $r = \min_{1 \leq i \leq p} r_i > 0$ pour avoir que

$$\forall 1 \leq i \leq p \qquad B(x, r) \subset B(x, r_i) \subset O_i.$$

D'où $B(x, r) \subset \cap_{i=1}^p O_i$ et l'intersection est donc ouverte. □

Notons que les caractères finis de I ne peuvent être évités. En effet, si on définit

$$U_n =]-1/n; 1/n[,$$

on vérifiera que $\cap I_n = \{0\}$ qui est non ouvert. On peut trouver le même contre-exemple avec des ensembles fermés :

$$\cup_n [0, 1 - 1/n] = [0, 1) \qquad \text{qui est non fermé.}$$

Distance à un ensemble Dans un espace vectoriel métrisé, on définit la distance à un ensemble par

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} \{d(x, y)\}.$$

Notons que par le fait que nécessairement $\{d(x, y)\}$ est une partie de $\mathbb{R}^+$, elle dispose d'un plus petit élément que cette borne inférieure à un sens.

Un ensemble est enfin dit borné si il possède un diamètre majoré :

Définition 3.1.7 (Ensemble borné) *Soit A un sous-espace d'un espace métrique, A est borné si et seulement si*

$$\exists x \in E \quad \exists r > 0 \qquad A \subset B(x, r).$$

On définit alors son diamètre au travers de

$$\delta(A) = \sup_{(x,y) \in A^2} d(x, y).$$

On remarquera que nécessairement, avec les notations précédentes

$$\delta(A) \leq 2r.$$

Voisinage Dès qu'on a définit la notion de boule ouverte, on peut définir un ensemble de voisinage.

Définition 3.1.8 *V_a est un voisinage d'un point $a \in E$ si et seulement si il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset V_a$.*

Cette notion de voisinage permet alors de définir l'adhérence d'un ensemble.

Définition 3.1.9 (Adhérence) *On dit que $a \in E$ est dans l'adhérence de A si et seulement si tout voisinage de a rencontre A. L'ensemble des points d'adhérence de A s'appelle simplement l'adhérence de A et est notée $\bar{A}$.*

Enfin, ces adhérences renvoient à la notion de densité d'un espace dans un autre.

Définition 3.1.10 (Partie dense) *On dit que A est dense dans E ssi*

$$\bar{A} = E.$$

Quelques exemples :

1. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2. L'ensemble des matrices inversibles est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   C'est un résultat assez simple à démontrer. On suppose que A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $\epsilon > 0$, on cherche M à distance au plus ϵ qui est inversible. On considère pour cela la matrice $A + sI_n$, où $s \in \mathbb{R}$. On sait que le déterminant de $A + sI_n$ est un polynôme en la variable s, il a donc au plus n racines. Par conséquent, il existe une suite $(s_k)_{k\geq 1}$ tendant vers 0 pour laquelle
   $$\det(A + s_k I_n) \neq 0.$$
   Cette suite de matrices $(A + s_k I_n)$ est une suite de matrices inversibles, et converge vers A. D'où la densité de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$.
3. L'ensemble des polynômes est dense dans l'ensemble des fonctions continues, pour la topologie de la convergence uniforme (norme infinie). C'est le théorème de Weierstrass. La démonstration n'est pas si élémentaire et réclame des outils un peu plus avancés d'analyse ou de probabilités.
4. L'ensemble A défini par
   $$A = \left\{ P \in \mathbb{R}[X] : P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \quad | \quad \sum_i a_i = 0 \right\}$$
   est dense dans $\mathbb{R}[X]$ pour la norme définie par
   $$N(P) = \sum_{i=0} \frac{|a_i|}{i+1}.$$
   Démontrons ce dernier résultat et donnons nous un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$. Soit $\epsilon > 0$, on cherche Q tel que $N(P - Q) \leq \epsilon$ avec $Q \in A$. On sait que P s'écrit
   $$P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i,$$
   et on considère
   $$Q_q = P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i - \sum_{i=0}^{n} a_i X^q,$$
   où $q > n$. Par construction, $Q \in A$ et par contre
   $$N(P - Q) = \frac{\sum_{i=0}^{n} |a_i|}{q+1} \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad q \longrightarrow +\infty.$$
   On a donc Q arbitrairement proche de P et A est dense dans $\mathbb{R}[X]$.

3.1.5 Topologie

Ce qui est appelée une *topologie* de E est la donnée d'un ensemble d'ouverts. Ces ouverts peuvent être induits par la notion de boule dérivée d'une distance d. Ainsi, la topologie induite par la distance d sera la donnée des ouverts de E au sens des boules ouvertes *via* d. Pour l'ensemble $E = [0, 1]$, on constatera que l'ensemble des ouverts est "infini", ce qui sera d'ailleurs communément le cas dans la suite de ce cours.

Voici quelques éléments de réflexion.

1. Démontrer que
$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$
est une norme pour $p = 1, 2, +\infty$. Par ailleurs, représenter les boules unités.

   La démonstration générale faisant intervenir les normes $\|.\|_p$ pour les suites s'appuie sur les éléments de démonstration déjà vus pour les inégalités de Minkowski. On peut cependant produire ici des démonstrations bien plus simples dans les cas $p = 1, 2, +\infty$.

2. Démontrer que d définie par
$$d(x, y) = \frac{|x - y|}{|x - y| + 1},$$
est une distance sur $\mathbb{R}$.
Le seul point délicat réside dans l'inégalité triangulaire. On désigne par f l'application telle que
$$f(d) = \frac{d}{d + 1}.$$
On sait que $|. - .|$ est une distance, donc
$$\forall (x, y, z) \qquad |x - y| + |y - z| \geq |x - z|.$$
En appliquant f qui est une fonction croissante $f(|x - y| + |y - z|) \geq f(|x - z|)$. Enfin, on remarque que lorsque u et v sont positifs, on a :
$$f(u + v) = \frac{u + v}{1 + u + v} = \frac{u}{1 + u + v} + \frac{v}{1 + u + v} \leq \frac{u}{1 + u} + \frac{v}{1 + v} = f(u) + f(v).$$
Cette dernière suite d'inégalités permet alors de conclure.

3. Démontrer que $\|A\| = \sqrt{Tr(A^t A)}$ est une norme sur l'espace des matrices réelles. Cette norme dérive-t-elle d'un produit scalaire ?
Un calcul rapide permet d'écrire qu'en réalité :
$$\|A\|^2 = \sum_{i,j} a_{i,j}^2.$$
C'est donc une forme quadratique dont l'identité de polarisation donne
$$\|A + B\|^2 - \|A\|^2 - \|B\|^2 = 2\sum_{i,j} a_{i,j} b_{i,j} = 2\langle A, B\rangle = 2Tr(A^t B).$$
C'est donc une norme dérivée du produit scalaire précédent, appelée norme de Frobenius.

4. La partie $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad xy = 1\}$ est-elle ouverte ? fermée ? bornée ?

   Clairement, la partie A n'est pas bornée : si on considère $(n, 1/n)$ avec $n \longrightarrow +\infty$, on obtient une séquence de point non borné qui appartient à A. On constate également que A n'est pas une partie ouverte puisque pour tout point de A, aucune boule de $\mathbb{R}^2$ centrée en ce point n'est contenue dans A.

   Enfin, le complémentaire de A est par contre ouvert : si (x,y) est tel que $xy \neq 1$, un dessin suffira à ce convaincre qu'on peut trouver une boule centrée en (x,y) n'intersectant pas A, donc appartenant à son complémentaire... Ainsi, A est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.

Notons enfin qu'il existe des critères simples pour démontrer que certains ensembles sont fermés (et donc ouvert en passant au complémentaire).

Proposition 3.1.5 *Un ensemble U est fermé dans E si et seulement si toute suite d'élements de U convergente converge dans U.*

3.1.6 Convergences, ensembles compacts

Convergences On utilisera souvent ces normes ou distances pour quantifier comment un objet se rapproche d'un autre. Aussi, on parlera de suite convergente au travers de la définition suivante.

Définition 3.1.11 (Suites convergentes) *Soit (E,d) un espace métrique, une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers u dans E si et seulement si*

$$\lim_{n\to+\infty} d(u_n, u) = 0.$$

Si l'espace est normé, on pourra bien entendu parler de la même notion en utilisant $\|. - u\|$ au lieu de $d(., u)$.

Il est parfois judicieux d'utiliser plusieurs normes sur un même espace E. Cela amène à se poser la question générique : si N_1 et N_2 sont deux normes sur E, a-t-on

$$N_1(u_n) \longrightarrow 0 \Longleftrightarrow N_1(u_n) \longrightarrow 0?$$

Là encore, en toute généralité, ce dernier point est faux, sauf lorsque les normes sont "équivalentes". C'est d'ailleurs précisément la définition de cette notion.

Définition 3.1.12 (Normes équivalentes) *N_1 et N_2 sont équivalentes si et seulement si toute suite convergente vers 0 au sens de N_1 converge au sens de N_2.*

Cette relation sur l'ensemble des normes sur E est bien une relation d'équivalence. Notons qu'enfin, cette notion de norme équivalente est une notion "autour de 0" au sens où la proposition suivante garantit l'équivalence des normes.

Proposition 3.1.6 *N_1 et N_2 sont équivalentes si et seulement si*

$$\exists (c, C) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \qquad cN_1 \leq N_2 \leq CN_1. \tag{3.4}$$

Preuve : Nous démontrons tout d'abord que (3.4) implique que N_1 et N_2 sont équivalentes. C'est presque évident car si x_n est une suite de points tendant vers 0 pour N_1, alors $N_2(x_n) \leq CN_1(x_n) \longrightarrow 0 \quad$ lorsque $\quad n \longrightarrow +\infty$. Si la suite x_n est une suite de points tendant vers 0 pour N_2, alors $N_1(x_n) \leq c^{-1}N_2(x_n) \longrightarrow 0 \quad$ lorsque $\quad n \longrightarrow +\infty$. D'où la conclusion.

Réciproquement, démontrons que si N_1 et N_2 sont équivalentes, alors elles satisfont (3.4). On va se restreindre à démontrer (3.4) lorsque les points x sont pris dans des boules au sens de N_1. En effet :

$$N_2(x) = N_2\left(\frac{x}{N_1(x)}N_1(x)\right) = N_1(x)N_2\left(\frac{x}{N_1(x)}\right).$$

Ainsi, si N_2 est bornée sur $B_{N_1}(0,1)$, alors la conclusion s'en suivra. Supposons donc le contraire : ainsi pour tout entier n, il existe x_n dans $B_{N_1}(0,1)$ tel que

$$N_2(x_n) \geq n.$$

Cela signifie que $N_2(x_n/n) \geq 1$. Mais on sait que $x_n/n \in_{N_1} (0, 1/n)$ et donc x_n/n tend vers 0 pour N_1. Cela signifie alors que N_2 n'est pas équivalente à N_1, ce qui est absurde. Par conséquent, N_2 est bornée sur $B_{N_1}(0,1)$ par C et finalement, nous obtenons que

$$\forall x \in E \qquad N_2(x) \leq CN_1(x).$$

L'inégalité $N_1 \leq c^{-1}N_2$ est également satisfaite en permutant les rôles de N_1 et N_2. □

On retiendra du résultat précédent que pour prouver que 2 normes ne sont pas équivalentes, il suffit de trouver une suite d'éléments de E qui tend vers 0 pour l'une mais pas pour l'autre.

Si la situation sera simple en dimension finie pour les $\mathbb{R}$ espaces vectoriels, ce sera loin d'être le cas en dimension infinie (lorsque E est un espace de suites ou de fonctions).

À toutes fins utiles, on démontrera que $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur $E = \mathcal{C}([0,1])$ en considérant la suite de fonctions "triangles" de base $1/n$ et de hauteur 1. Même question avec $\|.\|_2$ à comparer à $\|.\|_1$.

Par contre, on peut chercher à démontrer à la main que sur $E = \mathbb{R}^n$, les normes $\|.\|_p$ sont toutes équivalentes entre elles.

Compacts La définition suivante est très importante.

Définition 3.1.13 (Compacts) *Soit K une partie d'un espace métrique E. On dit que K est compact s'il vérifie la propriété de Borel-Lebesgue : de toute recouvrement de K par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

Cela se traduit de la manière suivante : si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts telle que

$$K \subset \cup_{i\in I} U_i$$

, alors il existe un sous-ensemble J de I fini tel que

$$K \subset \cup_{i\in J} U_i.$$

Théorème 3.1.2 (Théorème de Bolzano-Weierstrass) *Le célèbre résultat est ainsi énoncé :*

- *Un ensemble K d'un espace métrique E est compact si et seulement si de toute suite d'éléments de K on peut extraire une sous-suite convergente dans K.*
- *En particulier, dans les $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ espaces vectoriels de **dimension finie**, les parties compactes sont les fermés bornés.*

On ne démontrera pas ce résultat par soucis de concision. On pourra consulter des démonstrations complètes dans des traités classiques de topologie (livre de C. Wagschal : "Topologie et analyse fonctionnelle", ou de G. Skandalis : "Topologie et analyse 3e année : Cours et exercices avec solutions").

Remarquons enfin que l'hypothèse de dimension finie est fondamentale pour pouvoir affirmer qu'un espace fermé et borné est compact. En effet, considérons $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes à valeurs réelles. On considère cet espace vectoriel normé au travers de la norme

$$N(\sum_{i=0}^{k} a_i X^i) = \sup_{0\leq i\leq k} |a_i|.$$

Appelons B la boule unité fermée de E relativement à cette norme et remarquons que B est donc fermée et bornée. Pourtant, B n'est pas compacte : la suite de polynômes $P_n(X) = X^n$ est bien dans B, de norme 1 et ne converge vers aucun point de B, ni de $\mathbb{R}[X]$ car tous les termes de la suite $(P_n)_{n\geq 0} \in E^{\mathbb{N}}$ sont à distance 1.

3.2 Fonctions sur un espace vectoriel normé

3.2.1 Continuité

On étudiera la plupart du temps des fonctions sur les e.v.n. et notamment au travers de propriétés de continuité de ces fonctions.

Définition 3.2.1 (Continuité) *Une application f de (E, d) dans (F, d') est continue si*

$$\forall x \in E \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists r > 0 \qquad y \in B(x, r) \Longrightarrow f(y) \in B'(f(x), \epsilon).$$

où B désigne la boule au sens de d, et B' celle au sens de d'.

C'est une notion bien connue, tout autant que la notion de fonction Lipschitzienne. Là encore, cette notion est directement reliée aux distances utilisées sur les espaces normés ou métrisés.

Définition 3.2.2 (Fonctions Lipschitzienne) *Une application f de E dans F est Lipschitzienne s'il existe k tel que*

$$\forall (x, y) \in E^2 \qquad d'(f(x), f(y)) \leq kd(x, y).$$

La constante de Lipschitz de f est la plus petite constante vérifiant l'inégalité précédente.

— Bien entendu, l'application "norme" est par construction 1-Lipschitzienne car c'est une conséquence immédiate de l'application de la Proposition 3.1.1 : si $f(x) = \|x\|$, alors

$$|f(x) - f(y)| = |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

— L'application distance à un ensemble est également Lipschitzienne : en effet considérons x, y dans E^2 et z un élément de A quelconque, A un sous-ensemble de E. On

$$d(x, A) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Puis, on a

$$d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, z).$$

Cette dernière inégalité étant vraie pour tout z de A, on peut alors prendre l'inf en z dans le terme de droite pour obtenir

$$d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, A).$$

Les rôles de x et y étant parfaitement symétriques, on obtient ensuite

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$$

— Un dernier exemple simple. On considère A le disque unité de $\mathbb{R}^2$ et f l'application qui à (x, y) associe (x^2, y^2). On considère la norme $\|.\|_2$:

$$\|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)\|_2 = \|(x_1^2-x_2^2, y_1^2-y_2^2)\|_2 = \sqrt{(x_1-x_2)^2 \underbrace{(x_1+x_2)^2}_{\leq 4} + (y_1-y_2)^2 \underbrace{(y_1+y_2)^2}_{\leq 4}}$$

On obtient alors que f est 2-Lipschitzienne.

Les applications Lipschitziennes sont une source inépuisable d'applications en analyse (on verra plus loin un exemple fondamental en "points fixes") et fournissent des exemples immédiats de fonctions continues.

Ces fonctions continues satisfont la propriété suivante importante :

Proposition 3.2.1 *L'image réciproque d'un fermé par une fonction continue est fermée. On a même équivalence : f est une application continue de E dans F si et seulement si pour tout ouvert O de F, $f^{-1}(0)$ est ouvert.*

Il n'en est pas de même des images "directes" : on peut considérer $f(x) = e^x$ et $I = [-\infty, 0$. I est fermé mais $f(I) =]0, 1]$ qui est ouvert.

Une notion plus forte que la continuité est celle de continuité uniforme. L'uniformité se traduit par une adaptation "universelle" du r de la définition de continuité à tout choix de x et y de l'espace vectoriel E.

Définition 3.2.3 (Continuité uniforme) *f est uniformément continue si elle vérifie :*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists r > 0 \quad \forall (x, y) \in E^2 \qquad d(x, y) \leq r \Longrightarrow d'(f(y), f(x)) \leq \epsilon.$$

0n démontrera en guise d'exercice les propriétés suivantes.

Proposition 3.2.2 *Une fonction Lipschitzienne est uniformément continue.*

<u>Preuve :</u> On considère f Lipschitzienne de coefficient L et $\epsilon > 0$. Si $\delta < \epsilon/L$, on a alors

$$\forall (x, y) \in E^2 \qquad |x - y| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon.$$

$\square$

La proposition suivante, basée sur l'inégalité des accroissements finis, permet de déduire facilement si une fonction dérivable est Lipschitzienne.

Proposition 3.2.3 *Pour toute fonction dérivable f définie sur un intervalle I, on a f Lipschitzienne si et seulement si f' bornée sur I.*

Notons que bien entendu, il existe des applications Lipschitziennes non dérivables ($|x|$ par exemple).

Enfin, il est important de remarquer l'effet d'une fonction continue sur un ensemble compact.

Théorème 3.2.1 *Soit f une fonction continue de E dans F où E et F sont deux e.v.n. Alors, si K est un compact de E, alors $f(K)$ est compact de F.*

<u>Preuve :</u> La preuve est très simple en utilisant le critère séquentiel. Donnons nous une suite de points $(y_n)_{n\geq 0}$ de $f(K)$, alors il existe une suite de points $(x_n)_{n\geq 0}$ dans K tels que $f(x_n) = y_n$. L'ensemble K étant compact, on peut extraire une sous-suite $x_{\varphi(n)}$ convergente vers $x^* \in K$. Par continuité de f, on en déduit que

$$y_{\varphi(n)} = f(x_{\varphi(n)}) \longrightarrow f(x^*) \in f(K).$$

Ainsi, la suite $(y_{\varphi(n)})_{n\geq 1}$ est convergente. Cela permet de conclure. $\square$

Remarquons que si une fonction f est continue sur E et à valeurs réelles, alors de part la caractérisation des compacts de $\mathbb{R}$ (ce sont les fermés bornés) la fonction f est bornée et **atteint ses bornes**.

Notons enfin le théorème de Heine qui lie continuité à uniforme continuité.

Théorème 3.2.2 (Théorème de Heine) *Toute fonction continue sur un compact y est uniformément continue.*

Preuve : Là encore, la preuve exploite la définition de compacité. Soit K un compact et f une application continue sur K. Fixons un $\epsilon > 0$ et pour tout x de K, la fonctinuité de f en x nous assure l'existence d'un $\delta_{x,\epsilon}$ sur lequel :

$$\forall y \in B(x, \delta_{x,\epsilon}) \qquad |f(x) - f(y)| \leq \epsilon.$$

Par ailleurs, on sait que $\cup_{x\in K} B(x, 2^{-1}\delta_{x,\epsilon})$ est un recouvrement de K. On peut donc en extraire un sous-recouvrement fini de cardinal i^* :

$$K \subset \cup_{i=1}^{i^*} B(x_i, \frac{\delta_{x_i,\epsilon}}{2})$$

On considère alors

$$\delta^* = \min_{1\leq i\leq i^*} \frac{\delta_{x_i,\epsilon}}{2}$$

et on sait que

$$\forall (y,z) \in K^2 \qquad |y-z| \leq \delta^* \Longrightarrow \exists i : ||x_i - y| \leq \frac{\delta_{x_i,\epsilon}}{2} \qquad \text{et} \qquad |x_i - z| \leq \frac{\delta_{x_i,\epsilon}}{2}.$$

De ce fait, on a bien $|f(y) - f(z)| \leq \epsilon$ et le théorème de Heine s'en suit. $\square$

3.2.2 Applications linéaires entre espaces vectoriels normés

Soient E, F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés. Pour toute application **linéaire** $f : E \to F$, on pose

$$\|f\| = \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}.$$

En raison de la linéarité des fonctions considérées, on a aussi :

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|f(x)\|.$$

Si $F = \mathbb{R}$, c'est-à-dire lorsque f est une forme linéaire réelle, on a aussi

$$\|f\| = \sup_{\|x\|\leq 1} f(x).$$

La continuité des applications linéaires d'e.v.n. est facilement caractérisable en vertu de la proposition suivante.

Proposition 3.2.4 (Continuité des applications linéaires d'e.v.n.) *Les trois propositions suivantes sont équivalentes.*

1. *f est continue en* 0.
2. *f est continue.*

3. $\|f\|$ *est fini.*

— Voici un petit calcul simple de la norme d'une application linéaire. On considère une matrice A donnée par
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$
On considère f l'application de $(\mathbb{R}^2, \|.\|_1)$ dans $(\mathbb{R}^2, \|.\|_2)$ donnée par
$$f(x,y) = A(x,y)^t.$$
0n vérifie que
$$\|f(x,y)\|_2^2 = (ax+by)^2 + (cx+dy)^2 \leq \left(|x|\sqrt{a^2+c^2} + |y|\sqrt{b^2+d^2}\right)^2.$$
Ce dernier terme se majore encore en
$$|x|\sqrt{a^2+c^2} + |y|\sqrt{b^2+d^2} \leq (|x|+|y|)\max\{\sqrt{a^2+c^2}; \sqrt{b^2+d^2}\}$$
Finalement, on a lorsque $\|(x,y)\|_1 \leq 1$ que
$$\|f(x,y)\|_2 \leq \max\{\sqrt{a^2+c^2}; \sqrt{b^2+d^2}\},$$
et on vérifiera aisément que cette borne est atteinte, soit en $(1,0)$, soit en $(0,1)$. Ainsi, on a démontré que
$$\|f\| = \max\{\sqrt{a^2+c^2}; \sqrt{b^2+d^2}\}.$$

— Il est important de remarquer le rôle de la norme : en se plaçant dans $E = \mathbb{R}[X]$, on considère
$$\varphi(P) = P(2).$$
Si E est muni de la norme $\|.\|_{\infty,[0,1]}$, alors on a bien $|\varphi(P)| \leq \|P\|_\infty$ et φ est continue. Si par contre on considère la norme qui est le sup des coefficients du polynôme, alors φ n'est pas continue : $P_n(X) = X^n$ est de norme 1 et pourtant $\varphi(P_n) = 2^n$.

C'est à cause de l'équivalence entre (1) et (3) que les termes "application linéaire bornée" et "application linéaire continue" sont parfois employés comme synonymes. Dans la suite, on notera $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F. La proposition suivante est immédiate

Proposition 3.2.5 *1. L'application* $\mathcal{L}(E,F) \to \mathbb{R}$ *qui à* f *associe* $\|f\|$ *est une norme appelée norme d'opérateur.*

2. Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ *et* $g \in \mathcal{M}(F,G)$*, alors*
$$\|g \circ f\| \leq \|g\|.\|f\|.$$
3. Si E *n'est pas réduit à* $\{0\}$*, alors*
$$\|Id\| = 1.$$

<u>Preuve :</u> La démonstration des trois points repose sur la définition de la norme opérateur.

1. Notons que si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, alors

$$\|f\| = 0 \Longrightarrow \sup_{\|x\|\neq 0} \|f(x)\|/\|x\| = 0 \Longrightarrow \forall x \in E \qquad f(x) = 0.$$

La propriété d'homogénéité est évidente. Par ailleurs, on a bien par inégalité triangulaire et définition de $\|f\|$ et $\|g\|$ que

$$\forall x \in E \quad \|x\| \leq 1 \qquad \|(f+g)(x)\| \leq \|f(x)\| + \|g(x)\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

Puis, en passant au sup dans le membre de droite, on en déduit alors que

$$\|f+g\| \leq \|f+g\|.$$

2. Le second point provient des inégalités suivantes :

$$\forall x | \|x\| \leq 1 \qquad \|g \circ f(x)\| = \|f(x)\| \left\| g\left(\frac{f(x)}{\|f\|(x)}\right)\right\| \leq \|f(x)\| \sup_{\|y\|\leq 1} \|g(y)\| \leq \|f\| \times \|g\|.$$

3. Enfin, le dernier point est évident puisque $\|Id\| = \sup_x \|f(x)\|/\|x\| = \sup_x \|x\|/\|x\| = 1$.

□

Il découle de la proposition précédente le corollaire suivant

Corollaire 3.2.1 *Si $f \in \mathcal{L}(E,E)$, alors*

$$\|f^n\| \leq \|f\|^n.$$

Voici quelques exemples qui méritent une petite réflexion.

— On considère $\phi : \mathbb{R}[X] \mapsto \mathbb{R}$ donnée par

$$\phi(P) = P(2).$$

Par ailleurs, on considère la norme définie par le sup des coefficients de P : $N(P) = \sup_i |a_i|$ où $P = \sum a_i X^i$.
On considère alors le polynôme particulier $P_n(X) = X^n$ et on constate que $N(P_n) = 1$ alors que $\phi(P_n) = 2^n \longrightarrow +\infty$. Aussi, l'application ϕ n'est pas continue puisque $\|\phi\| = \infty$.

— De la même façon, on considère toujours sur $\mathbb{R}[X]$ la norme infinie précédente et la nouvelle norme N_1 définie par

$$N_1\left(\sum a_i X^i\right) = \sum_i |a_i|,$$

L'application d'intérêt ici $\psi(P) = P$, mais considérée de l'e.v.n. $(\mathbb{R}[X], N)$ dans l'e.v.n. $(\mathbb{R}[X], N)$. On constate alors que $P_n = 1 + X + \ldots + X^{n-1}$ est tel que $N(P_n) = 1$ alors que $N_1(P_n) = n$. Aussi, l'application $\psi = Id$ n'est pas continue entre ces deux espaces vectoriels normés.

Chapitre 4

Compléments d'analyse : espaces complets, espaces de Hilbert

4.1 Espaces complets et de Banach

4.1.1 Suites de Cauchy

Définition 4.1.1 (Suites de Cauchy) *Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ d'un espace métrique (E,d) est dite de Cauchy si elle vérifie :*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall (p,q) \geq N \qquad d(u_p, u_q) \leq \epsilon.$$

Ces suites ont certaines propriétés relativement pratique.

Proposition 4.1.1
- *Toute sous-suite d'une suite de Cauchy est une suite de Cauchy.*
- *Toute suite de Cauchy est bornée.*
- *Une suite est convergente si et seulement si elle est de Cauchy et possède une sous-suite convergente.*
- *L'image d'une suite de Cauchy par une application uniformément continue est de Cauchy.*

Preuve : Les démonstrations sont relativement élémentaires. Pour i), on considère $(u_n)_{n\geq 1}$ de Cauchy et ϕ une extraction de sorte que $v_n = u_{\phi(n)}$. Pour ϵ positif, on sait qu'il existe n_0 tel que le critère de Cauchy est satisfait pour n supérieur à n_0. De ce fait, en considérant $\tilde{n}_0$ tel que $\phi(\tilde{n}_0) \geq n_0$, on a alors le critère de Cauchy satisfait pour $(v_n)_{n\geq 0}$.

Pour ii), il suffit de prendre $\epsilon = 1$ et constater qu'il existe n_1 pour lequel le critère de Cauchy est satisfait. Puis,

$$\forall n \geq n_1 \qquad |u_n - u_{n_1}| \leq 1,$$

de sorte que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est bornée.

Pour iii), il suffit de récrire la définition. $\square$

Notons par exemple que la suite $u_n = (-1)^n$ est une suite bornée mais qui n'est pas de Cauchy. De même, la suite $u_n = 1/n$ sur l'ensemble $(0,1]$ est une suite de Cauchy mais ne converge pas dans son espace de définition puisque 0 n'est pas dans $(0,1]$.

4.1.2 Espaces complets, Espaces de Banach

Cette notion probablement rencontrée auparavant se synchronise parfois avec la notion de suite convergente. En réalité, il existe également des espaces métriques où la différence est réelle ! Cette remarque impose donc le résultat suivant, ainsi que la prochaine définition.

Définition 4.1.2 (Espaces complets) *Un espace E est complet si toutes les suites de Cauchy de cet espace convergent.*

Une proposition pratique permet d'obtenir des espaces complets à partir d'autres :

Proposition 4.1.2 — *Si (E, N_E) et (F, N_F) sont complets, alors le produit cartésien $E \times F$ est complet pour la norme $N = N_E + N_F$.*
— *Si E est complet et F fermé dans E, alors F est complet.*

<u>Preuve :</u> Le premier point se démontre en revenant à la définition : soit (u_n) une suite de Cauchy de $E \times F$, alors pour tout ϵ, il existe n_ϵ tel que le critère est satisfait au delà de n_ϵ.

On a donc

$$N(u_n - u_{n+p}) \leq \epsilon$$

De ce fait, on a bien $N_E(u_n^E - u_{n+p}^E) \leq \epsilon$ et la coordonnée dans E de la suite u est de Cauchy. Il en est de même pour la coordonnée dans F. Ainsi, chaque coordonnée est convergente et donc la suite u également. Conclusion : $E \times F$ est complet.

Le second point consiste à considérer une suite de Cauchy dans F, remarquer qu'elle est alors de Cauchy dans E et donc convergente. Mais F étant fermé, la suite converge alors nécessairement dans F, et donc F est complet. $\square$

Enfin, un exemple fondamental d'espace complet est bien connu (en vertu du prochain résultat).

Théorème 4.1.1 *Dans l'espace $\mathbb{R}^p$ muni de la distance euclidienne, toute suite de Cauchy est convergente. Aussi, $\mathbb{R}^p$ est complet.*

<u>Preuve :</u> En vertu de la proposition précédente, il suffit de démontrer ce résultat pour $d = 1$. Considérons une suite de Cauchy $(u_n)_{n\geq 1}$ réelle et appelons

$$\alpha_p := \inf_{k\geq p} u_k \qquad \text{et} \qquad \beta_p := \sup_{k\geq p} u_k.$$

Les suites $(\alpha_p)_{p\geq 1}$ et $(\beta_p)_{p\geq 1}$ sont respectivement croissantes et décroissantes. Par ailleurs, par définition des suites de Cauchy, on a

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_\epsilon \quad | \quad \forall n \geq n_\epsilon, \forall q \in \mathbb{N} \qquad u_n - \epsilon \leq u_{n+q} \leq u_n + \epsilon$$

Par conséquent, comme $u_n - \epsilon \leq \alpha_n$ et $u_n + \epsilon > \beta_n$, on obtient que

$$\forall n \geq n_\epsilon \qquad |\alpha_n - \beta_n| \leq 2\epsilon$$

On peut donc déduire que $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n - \beta_n = 0$. Ces deux suites $(\alpha_p)_{p\geq 1}$ et $(\beta_p)_{p\geq 1}$ sont donc adjacentes, puis convergentes. Il en est alors de même de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$. $\square$

Définition 4.1.3 (Espaces de Banach) *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé et complet.*

Voici quelques exemples.

En dimension finie

1. Pour la distance usuelle, $\mathbb{Q}$ n'est pas complet mais $\mathbb{R}$ l'est puisque toute suite réelle bornée possède des sous-suites qui convergent.

   Considérons par exemple la suite de $\mathbb{Q}$ définie par $u_0 = 1$, puis $u_1 = 1.4$, $u_2 = 1.41$, $u_3 = 1.414, \ldots$. On se convainc aisément que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien de Cauchy, et par construction elle converge vers $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. On peut donc conclure que $\mathbb{Q}$ n'est pas complet.

2. Heureusement, il faut constater que cette situation pathologique n'est pas si courante, en vertu du résultat suivant.

   Proposition 4.1.3 *Tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie est un espace de Banach.*

En dimension infinie Les objets de dimension infinie sont de nature plus complexes (suites, fonctions, ...). Un premier résultat positif est le suivant :

Proposition 4.1.4 *L'ensemble des fonctions continues $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ est un espace de Banach lorsqu'il est muni de la norme $\|.\|_\infty$.*

Preuve : Considérons pour cela une suite de Cauchy de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, notée $(f_n)_{n\geq 1}$ et remarquons que pour tout x de $[0,1]$, la suite $(f_n(x))_{n\geq 1}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ qui est complet. Aussi, $(f_n(x))_{n\geq 1}$ est convergente vers une limite que nous noterons $f(x)$.

On sait aussi que

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \quad n \geq n_0, p \geq 0 \Longrightarrow \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f_{n+p}(x)| \leq \epsilon.$$

En passant à la limite en p, on a alors que

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \quad n \geq n_0 \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon.$$

Autrement dit, on a :

$$N_\infty(f_n, f) \Longrightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad n \longrightarrow +\infty.$$

Il reste ensuite à démontrer que la fonction f est continue. Ce dernier point provient du fait que l'ensemble des fonctions continues est un fermé pour la norme infinie. Si $f_n \longrightarrow f$ en norme infinie, alors

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \exists n_\epsilon \quad n \geq n_\epsilon \quad \Longrightarrow N_\infty(f_n - f) \leq \epsilon.$$

Fixons alors $x \in [0,1]$ et $n \geq n_\epsilon$, on sait alors que f_n est continue en x, donc il existe $\eta > 0$ pour lequel

$$|x - y| \leq \eta \Longrightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leq \epsilon.$$

Puis,

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \leq 3\epsilon.$$

□

Toutefois, la norme joue un rôle très important comme on l'a déjà vu pour d'autre notions. En effet, le même espace muni de la norme $N_1(f) = \int_0^1 |f|$ n'est pas complet. En effet, considérons la fonction f_n égale à 1 entre 0 et $1/2 - 1/n$, nulle au delà de $1/2 + 1/n$ et affine entre $1/2 - 1/n$ et $1/2 + 1/n$. On démontre aisément que c'est une suite de Cauchy puisque

$$N_1(f_{n+p} - f_n)) \leq \frac{1}{2n}.$$

Cependant, la limite de f_n est discontinue en $1/2$, prouvant ainsi que $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), N_1)$ n'est pas complet.

Proposition 4.1.5 *L'espace ℓ^p pour $p \geq 1$ est un espace de Banach où ℓ^p désigne l'ensemble des suites dont la puissance p est sommable.*

Preuve : Là encore, la preuve se déroule en découpant les ϵ. On considère une suite de Cauchy $(u^n)_{n\geq 1}$ dans ℓ^p. Chaque coordonnée de la suite est donc une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$, donc convergente vers une quantité telle que

$$u_k^n \longrightarrow u_k.$$

Il faut alors démontrer que u_k est bien un élément de ℓ^p. Cela se démontre en suivant encore le schéma de la preuve précédente. Enfin, il reste à prouver que $\|u^n - u\|_p \longrightarrow 0$ lorsque n tend vers l'infini. On consultera un manuel d'analyse de licence pour une démonstration complète. □

Cette dernière proposition fait d'ailleurs écho à la complétude de l'espace de fonctions $\mathbb{L}^p(I)$ où I est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$.

Théorème 4.1.2 *L'ensemble des fonctions de $\mathbb{L}^p(I)$ muni de la norme $\|f\|_p = \left(\int_I |f|^p\right)^{1/p}$ est complet.*

Pour une preuve de ce résultat, on pourra par exemple consulter le livre d'H. Brezis.

Par ailleurs, la proposition suivante garanti le caractère espace de Banach, au même titre que la proposition comparable sur les espaces complets précédentes.

Proposition 4.1.6
- *Tout sous-espace fermé d'un espace de Banach est un Banach.*
- *Le produit d'espaces $E \times F$ est complet si et seulement si E et F sont complets.*

4.1.3 Applications contractantes et points fixes

Les fonctions définies sur des e.v.n. qui sont « contractantes »et définies sur des espaces de Banach trouvent des applications fondamentales en probabilités, équations différentielles ou aux dérivées partielles. Les résultats de type point fixe ressemblent tous au résultat suivant.

Théorème 4.1.3 (Théorème de Banach-Picard) *Soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach, A un fermé de E et f une application contractante de A dans A, c'est-à-dire qui vérifie :*

$$\exists k \in (0,1) \quad \forall (x,y) \in A^2 \qquad \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|,$$

Alors f admet un unique point fixe dans A :

$$\exists\,!\, x \in E \qquad f(x) = x.$$

Les hypothèses du théorème sont toutes absolument nécessaires :
- Si $f(x) = \sqrt{1+x}$, alors f admet un point fixe unique sur $\mathbb{R}_+$.
- Si $A = (0,1)$ et $f(x) = x/2$, la fonction f est $1/2$ contractante et le seul point fixe de f est $0 \notin (0,1)$. L'espace $(0,1)$ ici n'est pas complet.
- De même, si $A = [0, +\infty[$ et qu'on définit $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, on a bien que

  $$|f(x) - f(y)| \leq k_{x,y}|x - y| \qquad \text{avec} \qquad 0 \leq k_{x,y} \leq 1.$$

  Cependant, la fonction f n'est pas k-contractante avec un $k < 1$ *indépendant* de x et y. De ce fait, aucun coefficient de contraction ne peut être inférieur à 1 strictement et uniformément. Aussi, le théorème ne s'applique pas, ce qui est totalement logique puisqu'on constatera que f n'a pas de point fixe.

— $f(x) = x$ est 1 contractante. On n'a pas l'unicité du point fixe.
— Certaines applications sont non contractantes et admettent pourtant des points fixe :

$$f(x) = x^2 + x.$$

0 est le seul point fixe mais l'application n'est pas contractante, même au voisinage de 0 puisque $f'(0) = 1$.

Preuve : On va construire un tel point fixe par le biais de suites de Cauchy. On se donne $x_0 \in A$ et on définit alors la suite récurrente d'ordre 1 (pas linéaire) :

$$\forall n \geq 0 \qquad x_{n+1} = f(x_n).$$

On va démontrer que $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy. Tout d'abord, une récurrence immédiate sur n montre que

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n \|x_1 - x_0\|.$$

De ce fait, on a

$$\begin{aligned}
\|x_{n+p} - x_n\| &= \left\| \sum_{i=n}^{n+p-1} x_{i+1} - x_i \right\| \\
&\leq \sum_{i=n}^{n+p-1} \|x_{i+1} - x_i\| \\
&\leq \sum_{i=n}^{n+p-1} k^i \|x_1 - x_0\| \\
&\leq k^n \|x_1 - x_0\| \sum_{i=0}^{p-1} k^i \\
&\leq \frac{k^n}{1-k} \|x_1 - x_0\|.
\end{aligned}$$

La dernière inégalité assure alors que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy. Comme A est un espace complet, alors la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers x^*. Par ailleurs, f est Lipschitzienne donc continue et nécessairement $f(x^*) = x^*$.

Nous établissons enfin l'unicité : on se donne 2 points fixes x et y. On a donc

$$\|x - y\| = \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|,$$

avec $k < 1$. Ainsi, on obtient

$$(1 - k)\|x - y\| \leq 0.$$

Cela permet de conclure que $x = y$. □

Il existe de nombreuses généralisations de ce théorème à des contextes fonctionnels plus généraux, ou adaptés à des cadres d'application très particulier. On citera par exemple le théorème plus général suivant.

Théorème 4.1.4 *Soit A une partie complète non vide d'un e.v.n. et $f : A \to A$ tel qu'il existe p pour lequel f^p est contractante, alors f a un point fixe unique.*

Cette version du théorème est en particulier utilisé pour démontrer des propriétés fondamentales sur les chaînes de Markov en probabilité.

Preuve : On considère l'application f^p (qui doit être comprise comme $f \circ f \circ \ldots \circ f$). Elle est contractante donc possède un point fixe unique x :

$$f^p(x) = x.$$

En appliquand alors f, on obtient que

$$f^{p+1}(x) = f(x).$$

Par ailleurs, un petit jeu d'écriture permet de voir que $f^{p+1}(x) = f^p(f(x))$ et donc $f(x)$ est un point fixe de f^p. Comme f^p admet un *unique* point fixe, on en déduit que

$$f(x) = x.$$

Enfin, l'unicité du point fixe de f provient directement de celle du point fixe de f^p. □

Ces théorèmes de point fixe joueront un rôle fondamental dans la recherche de solutions à des équations implicites. Notez que ces théorèmes sont licites dans des cadres généraux d'espaces complets. Aussi, il ne sera pas surprenant de les rencontrer dans le contexte des équations différentielles, fonctions implicites, théorème d'inversion locale, équations aux dérivées partielles, contrôles des équations aux dérivées partielles, théorie des probabilités, ...

4.1.4 Théorèmes de point fixe à paramètres

Avant de donner des exemples plus élaborés, nous allons énoncer une extension du théorème de Picard qui concerne les fonctions à paramètres. Ce contexte se rencontre fréquemment en analyse.

Théorème 4.1.5 *Soit A une partie non vide fermé dans E Banach et B une boule ouverte de F. On considère une application $f : A \times B \longrightarrow A$ telle que $\exists k \in (0,1)$:*

$$\forall t \in B \quad \forall (x,y) \in A^2 \qquad \|f(x,t) - f(y,t)\| \leq k\|x-y\|$$

On suppose en plus que $f(x,.)$ est continue sur B, pour tout x de A. Alors, l'application $t \longmapsto g(t)$ point fixe de $f(.,t)$ est continue sur B.

Preuve : On considère t dans B :

$$\|g(t) - g(t')\| = \|f(g(t),t) - f(g(t'),t')\|$$

. On peut alors écrire que

$$\|g(t) - g(t')\| \leq \|f(g(t),t) - f(g(t),t')\| + \|f(g(t),t') - f(g(t'),t')\|.$$

Ainsi, on obtient, comme f est k Lipschitzienne, que

$$(1-k)\|g(t) - g(t')\| \leq \|f(g(t),t) - f(g(t),t')\| + \|f(g(t),t').$$

Notons que $k < 1$ et par conséquent $1 - k > 0$. Ainsi,

$$\|g(t) - g(t')\| \leq \frac{\|f(g(t),t) - f(g(t),t')\| + \|f(g(t),t')}{1-k}.$$

Comme $t' \longmapsto t$ implique que $f(g(t),t) - f(g(t),t') \longmapsto 0$, on obtient que g est continue en t. □

4.2 Équivalence des normes et espaces vectoriels complets

Dans tout ce paragraphe, E désigne un espace vectoriel normé. On a alors la première proposition importante, qui étend le théorème de Bolzano-Weierstrass aux espaces complets.

Théorème 4.2.1 *Dans les espaces complets, les ensembles compacts sont les fermés bornés.*

Nous ne démontrerons à nouveau pas ce résultat basé sur des arguments de recouvrement. Il implique par contre ce théorème fondamental :

Théorème 4.2.2 (Équivalence des normes en dimension finie) *Soit E un e.v.n. sur un corps complet, alors si E est de dimension finie toute les normes sont équivalentes.*

On notera par la suite $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et N une norme quelconque sur E. On considère également la norme infinie sur E définie par

$$\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|,$$

lorsque x s'écrit $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$. On a alors le lemme suivant.

Lemme 4.2.1 *Si E est de dimension finie, alors la norme N est continue de $(E, \|.\|_\infty)$ dans $(\mathbb{R}, |.|)$.*

<u>Preuve :</u> Nous allons démontrer que N est en fait Lipschitzienne. On peut en effet écrire que

$$N\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) \leq \sum_{i=1}^n |x_i| N(e_i) \leq \|x\|_\infty \sum_{i=1}^n N(e_i).$$

Posons $M = \sum_{i=1}^n N(e_i)$ et on a alors que M est non nul car les e_i sont des vecteurs non nuls de E. On a donc

$$N(x) \leq M\|x\|_\infty.$$

Ceci étant vrai pour tout x on a donc que

$$N(x - y) \leq M\|x - y\|_\infty.$$

L'inégalité triangulaire inversée permet alors de déduire que

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x - y) \leq M\|x - y\|_\infty.$$

Cela signifie donc que N est M-Lipschitzienne et donc continue. □

On en vient donc à la preuve du théorème.

<u>Preuve du théorème 4.2.2</u>

Comme E est de dimension finie, il est isomorphe à $\mathbb{R}^n$ et il suffit de démontrer le résultat pour $E = \mathbb{R}^n$. On va démontrer que toute norme N est équivalente à $\|.\|_\infty$. Considérons la sphère unité pour $\|.\|_\infty$:

$$S = \left\{ x \mid \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i| = 1 \right\}.$$

On sait que S est fermée et bornée dans $\mathbb{R}^n$ donc S est compacte (elle est fermée car image récriproque par $x \longmapsto \|x\|_\infty$ qui est une application continue, de $\{1\}$ qui est fermé). [1]

1. Notons que si $\mathbb{R}$ est modifié en un autre corps, mettons noté $\mathbb{K}$, alors pour savoir si S est compacte, on a besoin de savoir que $\mathbb{K}$ est complet car les compacts sont les fermés bornés uniquement lorsque le corps de base est complet. Ainsi, on peut obtenir exactement le même résultat en utilisant un autre corps que $\mathbb{R}$ du moment que celui-ci est complet.

D'après le Lemme précédent, on sait que l'application N est continue sur S, donc elle atteint ses bornes :

$$\exists (m,M) \in \mathbb{R}_+^2 \quad \forall x \in S \qquad m \leq N(x) \leq M.$$

Par ailleurs, N atteint ses bornes donc il existe x_0 dans S tel que $N(x_0) = m$ et comme x_0 est non nul, cela garanti que $m > 0$.

On obtient alors que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad m \leq N\left(\frac{x}{\|x\|_\infty}\right) \leq M.$$

D'où l'inégalité :

$$m\|x\|_\infty \leq N(x) \leq M\|x|\|_\infty$$

$\square$

Démontrons que l'hypothèse précédente de complétude sur le corps de base est <u>incontournable</u>. Notons que cette erreur est commise dans de nombreux ouvrages qu'il convient donc d'éviter...

On considère

$$E = \left\{a + b\sqrt{2}\,(a,b) \in \mathbb{Q}^2\right\}.$$

On notera que E est un $\mathbb{Q}$ espace vectoriel de dimension finie égale à 2. Par contre, $\mathbb{Q}$ n'est pas complet. Le théorème précédent ne s'applique donc pas. En effet, il y a moyen de trouver deux normes N_1 et N_2 qui ne sont pas équivalentes.

Plus précisément, définissons

$$N_1(a+b\sqrt{2}) = \max(|a|,|b|) \qquad \text{et} \qquad N_2(a+b\sqrt{2}) = |a+b\sqrt{2}|.$$

On démontre très facilement que N_1 et N_2 sont deux normes sur E. Elles ne sont par contre pas équivalentes. Si on considère la suite

$$u_n = (1-\sqrt{2})^n,$$

on constatera que

$$N_2(u_n) = (1-\sqrt{2})^n \longmapsto 0 \qquad \text{lorsque} \qquad n \longmapsto +\infty.$$

En revanche, il est aisé de voir que $N_1(u)$ ne tend pas vers 0. Si on récrit la formule du binôme en

$$u_n = a_n - \sqrt{2}b_n,$$

on a alors en regroupant termes pairs et impairs que

$$(1+\sqrt{2})^n = a_n + \sqrt{2}b_n.$$

Ainsi,

$$a_n = \frac{(1-\sqrt{2})^n + (1+\sqrt{2})^n}{2}.$$

Il est alors immédiat d'en conclure que $(a_n)_{n\geq 1}$ diverge. On obtient donc que

$$N_1(u_n) \longmapsto +\infty \qquad \text{lorsque} \qquad n \longmapsto +\infty.$$

Ainsi, N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes.

4.3 Espaces de Hilbert

4.3.1 Définitions

Définition 4.3.1 (Espace de Hilbert) *Un espace vectoriel normé* $(H, \|.\|)$ *est de Hilbert si sa norme provient d'un produit scalaire et s'il est complet.*

L'exemple phare dans la suite du paragraphe sera l'espace $\mathbb{L}^2$ associé à un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Le produit scalaire associé est en effet

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f g d\mu.$$

Définition 4.3.2 (Ensemble dense) *Un ensemble* G *dense dans un espace de Hilbert* H *vérifie :*

$$\forall h \in H \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists g \in G \qquad \|g - h\| \leq \epsilon.$$

De manière équivalente, cela signifie qu'on peut trouver une suite d'éléments de G *convergente vers* h *au sens de la norme* $\|.\|$.

Cette définition de densité permet alors de donner un sens à la définition suivante.

Définition 4.3.3 (Partie totale) *Une partie* F *de* H *est totale si l'ensemble des combinaisons linéaires finies des éléments de* F *est dense dans* H*. Autrement dit :*

$$\forall h \in H \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists (f_1, \ldots, f_n) \in F^n \quad \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n : \qquad \left\| h - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i \right\| \leq \epsilon$$

Rappelons qu'une famille orthonormée de vecteurs de H est un ensemble fini ou non de vecteurs orthogonaux deux à deux et de norme 1. On définit alors la notion fondamentale :

Définition 4.3.4 (Base Hilbertienne) *Une famille* $(e_1, \ldots, e_n, \ldots)$ *est une base hilbertienne de* H *si c'est une famille orthonormée totale dans* H*.*

Sans entrer précisément sur ce que sont les espaces *séparables*, on notera l'importante propriété (sans démonstration).

Proposition 4.3.1 *Considérons* H *un espaces de Hilbert séparable (admet une famille dénombrable dense), alors*

i) H *admet une base hilbertienne au plus dénombrable.*

ii) Si $\{e_i, i \in I\}$ *est une base hilbertienne de* H*, alors tout élément orthogonal à tous les vecteurs* e_i *est nul.*

iii) Soit H *est de dimension finie et admet une base hilbertienne finie, soit il est de dimension infinie et dénombrable.*

4.3.2 Meilleure approximation et inégalité de Bessel

Les espaces de Hilbert présentent l'intérêt fondamental de pouvoir exploiter la structure de base hilbertienne afin de construire des approximants de manière performante au travers des produits scalaires de l'espace de Hilbert.

Théorème 4.3.1 *Si $\{e_i, i \in I\}$ est une base hilbertienne de H, alors pour tout élément f et toute partie J de I, on a pour toute combinaison $(a_j)_{j\in J}$:*

$$\left\| f - \sum_{j\in J} \langle f, e_j\rangle e_j \right\| \leq \left\| f - \sum_{j\in J} a_j e_j \right\|$$

Preuve : La preuve est relativement simple en écrivant que

$$\begin{aligned}
\left\| f - \sum_{j\in J} a_j e_j \right\|^2 &= \left\| f - \sum_{j\in J} \langle f, e_j\rangle e_j + \sum_{j\in J} (\langle f, e_j\rangle - a_j) e_j \right\|^2 \\
&= \left\| f - \sum_{j\in J} \langle f, e_j\rangle e_j \right\|^2 + \left\| \sum_{j\in J} (\langle f, e_j\rangle - a_j) e_j \right\|^2 \\
&\quad +2\langle f - \sum_{j\in J} \langle f, e_j\rangle e_j, \sum_{j\in J} (\langle f, e_j\rangle - a_j) e_j\rangle
\end{aligned}$$

On s'intéresse au dernier terme qui se récrit en

$$\langle f - \sum_{j\in J} \langle f, e_j\rangle e_j, \sum_{j\in J} (\langle f, e_j\rangle - a_j) e_j\rangle = \sum_{k\in J} (\langle f, e_k\rangle - a_k) \underbrace{\langle e_k, \langle f - \sum_{j\in J} \langle f, e_j\rangle e_j\rangle}_{:=0}$$

Comme la base est orthonormée, le dernier produit scalaire est en effet nul car en développant, un seul produit scalaire est non nul, à savoir $\langle e_k, f\rangle$ d'un côté, et $\langle e_k, f\rangle \times \|e_k\|^2$ de l'autre. □

L'interprétation géométrique est aussi parlante que la succession de calculs précédente : on introduit la notation $\pi_J(f)$:

$$\pi_J(f) := \sum_{j\in J} \langle f, e_j\rangle e_j.$$

On a que $\pi_J(f)$ est le projeté orthogonal de f sur l'ensemble engendré par $\{e_j, j \in J\}$ pour le produit scalaire $\langle , \rangle$.

On en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 4.3.1 *Soit $K \subset J$, alors*

$$\|f - \pi_J(f)\| \leq \|f - \pi_K(f)\|.$$

Cette dernière inégalité est en réalité mieux connue sous le nom d'inégalité de Bessel.

Théorème 4.3.2 ((In)-Égalité de Bessel) *Si $\{e_i, i \in I\}$ est une base hilbertienne de H au plus dénombrable, alors si $J \subset I$:*

$$\forall f \in H \qquad \sum_{i\in J} |\langle f, e_i\rangle|^2 \leq \|f\|^2.$$

Par ailleurs, on a égalité dans H au sens de la norme $\|.\|$:

$$\|f\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle f, e_i\rangle|^2$$

Preuve : La preuve suit le même cheminement que la preuve précédente. On considère J un sous-ensemble quelconque de I et on a

$$\langle f - \pi_J(f), \pi_J(f) \rangle = 0.$$

Ainsi, par le théorème de Pythagore :

$$\|f\|^2 = \|f - \pi_J(f)\|^2 + \|\pi_J(f)\|^2.$$

La norme $\|\pi_J(f)\|^2$ s'écrit simplement en exploitant l'orthonormalité de la base hilbertienne :

$$\|\pi_J(f)\|^2 = \sum_{j \in J} |\langle f, e_j \rangle|^2.$$

On a donc obtenu

$$\sum_{j \in J} |\langle f, e_j \rangle|^2 \leq \|f\|^2.$$

La seconde relation est appelée identité de Plancherel et se démontre en exploitant le fait que la base hilbertienne est une famille totale de H, puis que l'application “norme" est continue de H dans $\mathbb{R}_+$. Cette relation étant vraie pour tout sous ensemble J, on en déduit qu'il est également vrai pour I par passage à la limite. $\square$

Définition 4.3.5 *On appellera développement de f dans une base hilbertienne la quantité*

$$\sum_{i \in I} \langle f, e_i \rangle e_i.$$

On remarquera que cette série converge dans H, au sens où elle satisfait l'égalité de Bessel/Plancherel. L'élément de H vers lequel elle converge n'est autre que f lui-même en vertu du fait que

$$\forall j \qquad \langle e_j, f - \sum_{i \in I} \langle f, e_i \rangle e_i \rangle = 0.$$

Comme on a affaire à une base hilbertienne, il s'en suit que $f - \sum_{i \in I} \langle f, e_i \rangle e_i$ est nul dans H, et que donc

$$f = \sum_{i \in I} \langle f, e_i \rangle e_i.$$

Notons enfin que $\sum_{i \in I} \langle f, e_i \rangle e_i$ doit être interprété comme une limite lorsque l'on parcourt la totalité de la base hilbertienne de la somme des $\langle f, e_i \rangle e_i$. On a établi précédemment que la limite est f pour la norme dérivée du produit scalaire sur H. Ainsi, si on considère une autre norme que la norme $\|.\|$ (par exemple la norme infinie pour les fonctions), rien n'est garanti et par exemple il n'est pas évident que

$$\|f - \sum_{i \in I} \langle f, e_i \rangle e_i\|_\infty = 0$$

au sens où

$$\sum_{i=1}^{\infty} \langle f, e_i \rangle e_i \longmapsto f \qquad \text{lorsque} \qquad n \longmapsto +\infty \qquad \text{pour la norme} \qquad \|.\|_\infty.$$

4.3.3 Séries de Fourier

On note $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs complexes, et 2π périodique où $\mathbb{T} = [0, 2\pi]$. On notera μ la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}$: $\mu = \lambda/(2\pi)$. Enfin, on admettra l'important résultat sur les espaces $\mathbb{L}^p(\mathbb{T})$:

Théorème 4.3.3 *L'espace $\mathbb{L}^p(\mathbb{T})$ est complet pour $p \geq 1$.*

Nous allons uniquement consacré le reste du paragraphe au cas où $p = 2$, puisque le fait d'avoir un produit scalaire naturel fait de $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$ un espace de Hilbert dont le produit scalaire (hermitien) est

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{T}} f\bar{g} d\mu.$$

Définition 4.3.6 (Coefficients de Fourier) *Notons $E = \{e_n : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}\}$ avec $e_n(t) = e^{\mathrm{i}nt}$, alors le coefficient de Fourier de f est donné par*

$$c_n(f) = \langle e_n, f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-\mathrm{i}nt}dt$$

Nous allons étudier précisément la décomposition de f en série de Fourier au regard des éléments sur les espaces de Hilbert introduits précédemment.

Proposition 4.3.2 *$E = \{e_n : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}\}$ est une famille orthonormée de $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$.*

C'est un simple calcul provenant de la remarque $\bar{e_n} = e_{-n}$. En réalité, la famille E précédente est bien plus qu'une famille orthonormée en regard du théorème suivant.

Théorème 4.3.4 *$E = \{e_n : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}\}$ est une base hilbertienne de $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$. On a donc*

$$\forall f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{T}) \qquad f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, e_n\rangle e_n$$

avec convergence dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$.

La démonstration de ce théorème repose sur le fait qu'on est capable d'exhiber une propriété d'unicité de la décomposition de Fourier. Ce résultat est assuré par le lemme suivant.

Lemme 4.3.1 *Si f est **continue** sur $\mathbb{T}$, alors*

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad \langle f, e_n\rangle = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f = 0.$$

Preuve : La réciproque étant évidente, on ne s'intéresse qu'à l'implication directe. On considère f telle que $\forall n \in \mathbb{Z} \quad \langle f, e_n\rangle = 0$ et on suppose que f n'est pas identiquement nulle. Comme f est périodique, on peut imaginer que l'intervalle sur lequel f est non nulle contient $[-h, h]$ quitte à opérer une translation sur les f, translation ne modifiant pas la nullité des coefficients de Fourier du translaté de f.

Notons que f est orthogonale à tous les e_i, donc à tout polynôme trigonométrique et en particulier à

$$P_n(x) = (1 + \cos x - \cos h)^n.$$

On sait que pour $x \in]-h, h[$

$$\cos x \geq \cos h.$$

Par conséquent, on a

$$\lim_{n\longmapsto+\infty} P_n(x) = +\infty \qquad \text{pour} \qquad x \in]-h, h[.$$

Par contre, on sait aussi que puisque

$$\forall x \in]-\pi, \pi[\backslash[-h, h] : 0 < 1 + \cos x - \cos h < 1.$$

Ainsi, on a

$$\lim_{n\longmapsto+\infty} P_n(x) = 0 \qquad \text{pour} \qquad x \in]-\pi, \pi[\backslash[-h, h].$$

En utilisant le fait que

$$\langle f, P_n\rangle = 0 \forall n \in \mathbb{Z},$$

et le fait que

$$\int_{-\pi}^{\pi} fP_n = \int_{[-\pi,-h[\cup]h,\pi]} fP_n + \int_{-h}^{h} fP_n,$$

le théorème de convergence dominée montre que

$$\int_{[-\pi,-h[\cup]h,\pi]} fP_n \longmapsto 0 \qquad \text{lorsque} \qquad n \longmapsto +\infty.$$

Par ailleurs, le lemme de Fatou assure que

$$\int_{-h}^{h} fP_n = +\infty.$$

et on obtient alors une contradiction. □

On peut donc passer à la preuve du théorème de convergence dans $\mathbb{L}^2$ des séries de Fourier.

Preuve du théorème : Il suffit de démontrer que la famille est une base hilbertienne. Notons que le résultat du lemme précédent nous dit que toute fonction continue orthogonale aux e_n est nécessairement nulle. Il en est en réalité de même pour les fonctions de $\mathbb{L}^2$. En effet, on considère f dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$ et telle que $\langle f, e_n\rangle = 0$, pour tout entier n. On considère la fonction Φ définie par

$$\Phi(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t)dt.$$

Le théorème de Fubini permet de voir que $\langle \Phi, e_n\rangle = 0$ pour tout entier n. Aussi, Φ est donc continue et orthogonale à tous les e_n donc nulle d'après le lemme précédent. De la nullité de Φ, on déduit aisément la nullité p.p. de f. Ainsi, toute fonction de $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$ orthogonale aux éléments de E est nulle dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$ et E est donc une base hilbertienne de $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$. On peut donc appliquer l'identité de Pancherel et obtenir l'égalité au sens $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$:

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, e_n\rangle e_n.$$

□

On obtient alors les célèbres corollaires.

Corollaire 4.3.2 (Bessel, Plancherel, Parseval) *Soit* $(f, g) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{T})$*, on a alors*

— *Inégalité de Bessel :*

$$\sum_{k\in J} |c_k(f)|^2 \leq \|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f^2|(t)dt$$

— *Identité de Plancherel :*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)|^2 = \|f\|_2^2$$

— *Identité de Parseval :*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)\overline{c_k(g)} = \langle f, g\rangle$$

Il existe une théorie “ponctuelle" des séries de Fourier que nous n'aborderons pas dans ce cours par faute de temps. Notons tout de même que les résultats précédents sont suffisants pour établir de jolie formule de sommation, mais pas encore assez pour donner des développements en série de Fourier prenant un sens en norme infinie. En particulier, il existe de nombreuses fonctions $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$ dont la série de Fourier ne converge pas ponctuellement. Pour obtenir une telle convergence uniforme et ponctuelle, il est nécessaire d'ajouter des hypothèses de régularité plus contraignantes sur la fonction f (au moins continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux).