Université de Toulouse III, UFR MIG - Département de Mathématiques

M1F, Master 1, $4^{\text{ème}}$ année, Mathématiques Fondamentales

---

Systemes Intégrables - Examen du 30 janvier 2012
Durée : 4 heures

---

1. Soit
$$SO(3) = \{a \in GL(3) : A^t = A^{-1}, \det A = 1\}$$
le groupe spécial orthogonal,
$$so(3) = \{A \in gl(3) : A^t = -A\}$$
l'algèbre de Lie associé munie de la forme bi-linéaire non-dégénérée $< A, B >= Trace(AB)$. On note par $\wedge$ le produit véctoriel dans $\mathbb{R}^3$.

(a) Montrer que $\mathbb{R}^3$ avec le crochet $[x, y] = x \wedge y$ est un algèbre de Lie, puis que l'application
$$\hat{} : \mathbb{R}^3 \to so(3) : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \hat{a} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$$
est un isomorphisme des algèbres de Lie $(\mathbb{R}^3, \wedge)$ et $so(3)$.

(b) En identifiant $so(3)^*$ à $so(3)$ et $\mathbb{R}^3$, calculer la structure de Lie-Poisson $\{.,.\}$ de $\mathbb{R}^3$. Calculer les Casimirs de cette structure.

(c) Calculer les orbites adjointes de $SO(3)$ dans $so(3) = \mathbb{R}^3$. Expliciter le champ Hamiltonien X_H d'une fonction $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.
Indications : Si $\hat{}$ est l'application définie dans (a), alors
$$\hat{a}b = a \wedge b, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^3$$
$$L\hat{b}L^{-1} = Lb, \quad \forall L \in SO(3), b \in \mathbb{R}^3.$$

(d) Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$, $\lambda_i = const.$
$$M \in so(3) = \mathbb{R}^3, M = (\lambda_1\Omega_1, \lambda_2\Omega_2, \lambda_3\Omega_3), \Omega = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) \in \mathbb{R}^3.$$
Montrer que le système Hamiltonien associé à
$$H : so(3) \to \mathbb{R} : M \mapsto \frac{1}{2}(\lambda_1\Omega_1^2 + \lambda_2\Omega_2^2 + \lambda_3\Omega_3^2)$$
s'écrit
$$\frac{d}{dt}M = M \wedge \Omega$$
(équations d'Euler sur $so(3)$). Est-il un système intégrable ?

2. Le groupe Euclidien $SE(3) = SO(3) \times \mathbb{R}^3 = \{(A, a) : A \in SO(3), a \in \mathbb{R}^3\}$ des isométries affines de $\mathbb{R}^3$ agit sur $\mathbb{R}^3$ par la formule

$$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto Ax + a, x \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Montrer que la loi de composition de $SE(3)$ s'écrit

$$(A, a).(B, b) = (AB, Ab + a).$$

En déduire que

$$SE(3) \to SL(4) : (A, a) \to \begin{pmatrix} A & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est un homomorphisme des groupes de Lie.

(b) Identifier, en itilisant 1 (a), l'algèbre de Lie $se(3) = so(3) \times \mathbb{R}^3$ à $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ et montrer que le crochet de Lie s'écrit

$$[(M, \Gamma), (M', \Gamma')] \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 = (M \wedge M', M \wedge \Gamma' - M' \wedge \Gamma).$$

(c) En identifiant $se(3)^*$ à $se(3)$ et $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, calculer la structure de Lie-Poisson $\{.,.,\}$ de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Calculer les Casimirs de cette structure.

(d) Calculer les orbites adjointes de $SE(3)$ dans $se(3) = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Expliciter le champ Hamiltonien X_H de la fonction

$$H(M, \Gamma) = \frac{1}{2}(\lambda_1 \Omega_1^2 + \lambda_2 \Omega_2^2 + \lambda_3 \Omega_3^2) + l_1 \Gamma_1 + l_2 \Gamma_2 + l_3 \Gamma_3, l_i \in \mathbb{R}$$

(équations d'Euler-Poisson du corps solide a point fixe).

(e) On suppose ici que $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ et $l_1 = l_2 = 0, l_3 = 1$ (toupie symétrique dite "de Lagrange"). Montrer que M_3 est une intégrale première de X_H. Est-ce que X_H est un champ Hamiltonien intégrable ?

Questions supplémentaires :

(f) *On pose*

$$L(x) = x^2 \chi + xM + \Gamma, A(x) = x\chi + \Omega, x \in \mathbb{C}.$$

Montrer, en identifiant $\mathbb{R}^3$ à $so(3)$, que les équations de la toupie de Lagrange sont équivalentes à la paire de Lax

$$\frac{d}{dt} L(x) = L(x) \wedge A(x).$$

En déduire que la matrice $L = L(x)$ est isospectrale. Retrouver les intégrales premières.