Université Paul Sabatier | Année 2012-2013
L3 MMESI | Semestre 2

Dans ce qui suit, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

1 Calcul différentiel

Exercice 1 Donner la forme des applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2 Soient I un intervalle ouvert et $f : I \to E$ une application dérivable. Montrer que f est différentiable et exprimer sa différentielle en fonction de la dérivée.

Exercice 3 Montrer que l'application $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$F(x, y) = (x^3 y, \cos(x - y)),$$

est différentiable et calculer sa différentielle en tout point (x, y).

Exercice 4 Montrer que l'application $\Phi : \mathcal{L}(E) \times E \to E$ définie par

$$\Phi(L, x) = Lx,$$

est continue. Montrer ensuite qu'elle est différentiable et calculer sa différentielle.

Exercice 5 On suppose E équipé d'une structure euclidienne. Montrer que la norme associée $|| \cdot ||$ est différentiable en tout point de $E \setminus \{0\}$ et décrire le noyau de la différentielle en chacun de ces points.

Exercice 6 Rappeler la formule donnant le produit vectoriel $u \wedge v$ de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Montrer que l'application

$$(u, v) \mapsto u \wedge v,$$

est différentiable sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ et calculer sa différentielle.

Exercice 7 Dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne usuelle, on appelle **inversion** l'application de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ dans lui-même définie par

$$\vec{u} \longmapsto \frac{1}{|| \vec{u} ||^2} \vec{u} .$$

Montrer que cette application est différentiable et calculer sa différentielle.

Exercice 8 Donner le domaine de définition (comme partie de $\mathbb{R}^2$) de l'application

$$(x, y) \mapsto (x^2 + y^3) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right).$$

Montrer qu'elle a un prolongement continu à $\mathbb{R}^2$ et étudier la différentiabilité de ce prolongement.

Exercice 9 Considérons l'application de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (matrices 3×3) dans lui-même définie par

$$A \mapsto A^4.$$

Montrer que cette application est différentiable et calculer sa différentielle.

Exercice 10 Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et

$$f(x,y) = \frac{x^3 y}{x^4 + y^2}, \qquad \text{si } \ (x,y) \neq (0,0),$$

est dérivable dans toutes les directions en $(0,0)$, mais qu'elle n'est pas différentiable en ce point.

Exercice 11 Pour les fonctions suivantes, déterminer le domaine où elles sont C^1 et calculer leurs dérivées partielles.

a) $f_2(x,y,z) = \varphi(x^2 + y^2 + z^2)$, avec φ C^1 sur $]1,2[$.

b) $f_3(x) = g(x,x,x,x)$ avec g C^1 sur $\mathbb{R}^4$.

c) $f_1(x,y) = g(y,x)$, avec g C^1 sur Ω ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 12 [Équation de transport] Soit $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ fixé. On s'intéresse au problème d'inconnue u, application C^1 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + v_1 \frac{\partial u}{\partial x_1}(t,x) + \cdots + v_n \frac{\partial u}{\partial x_n}(t,x) &= 0, \qquad \text{sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) &= u_0(x), \qquad \text{sur } \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

où u_0 est une fonction donnée de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer que $(t,x) \mapsto u_0(x - tv)$ est de classe C^1 et est solution du problème.

b) Montrer que c'est la seule solution.

Exercice 13 Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq b$, il n'existe aucun $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$e^{ib} - e^{ia} = i(b-a)e^{ic}.$$

En déduire qu'il n'y a pas d'égalité des accroissements finis pour les fonctions à valeurs vectorielles.

Exercice 14 Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$F(x,y) = \big(\cos x - \sin y, \sin x - \cos y\big).$$

On suppose $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne usuelle.

a) Justifier que F est C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

b) Montrer que $|||dF(x,y)||| \leq \sqrt{2}$, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

c) Montrer que la suite récurrente définie par $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ et

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(\cos x_n - \sin y_n), \qquad y_{n+1} = \frac{1}{2}(\sin x_n - \cos y_n),$$

est convergente.

Exercice 15 Soient Ω un ouvert connexe de E et $f : \Omega \to E$ une application C^1. Montrer que

$$df = 0 \ \text{ sur } \ \Omega \qquad \Rightarrow \qquad f \ \text{ est constante.}$$

Exercice 16 Soit $f_n : B(0,1) \to F$ une suite d'applications C^1 définies sur la boule unité de E et à valeurs dans F, $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. On suppose que

- la suite $(f_n(0))$ converge,
- la suite (df_n) converge uniformément sur tout compact de $B(0,1)$ vers une application $G : B(0,1) \to \mathcal{L}(E,F)$.

Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur tout compact de $B(0,1)$.

Exercice 17 Soient Ω un ouvert de E et $f : \Omega \to E$ une application C^1 telle que

- f est injective,
- $df(x)$ est inversible pour chaque $x \in \Omega$.

Démontrer que $f(\Omega)$ est un ouvert de E, puis que f réalise un C^1 difféomorphisme de Ω sur $f(\Omega)$.

Exercice 18 Soient $\Omega =]0, +\infty[\times] - \pi, \pi[$ et $P : \Omega \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$P(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

a) Montrer que P est un C^1 difféomorphisme de Ω sur son image (à déterminer).

b) Calculer le Jacobien de cette application.

c) Supposons f de classe C^1 sur $P(\Omega)$ et posons $\varphi = f \circ P$. Calculer

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$$

en fonction des dérivées partielles de φ (autrement dit, exprimer l'opérateur différentiel $x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$ en coordonnées polaires).

Exercice 19 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 et telle que $f - \mathrm{Id}$ soit contractante. Montrer que f est un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 20 * Soit E un espace euclidien. On note $\langle ., . \rangle$ le produit scalaire et $||\cdot||$ la norme associée. Soit $f : E \to E$ de classe C^1. On suppose que f est une **isométrie**, ie

$$||df(x).h|| = ||h||,$$

pour tous $x, h \in E$.

a) Justifier le fait que $df(x)$ est inversible pour chaque $x \in E$ puis calculer $|||df(x)|||$ et $|||df(x)^{-1}|||$.

b) Montrer que pour tout $x_0 \in E$, il existe un voisinage Ω_{x_0} de x_0 tel que

$$||f(x) - f(y)|| = ||x - y||, \qquad \text{pour tous } \; x, y \in \Omega_{x_0}.$$

c) Montrer que, pour tous $x, y \in \Omega_{x_0}$ et tous $h, k \in E$, on a

$$\langle h, k \rangle = \langle df(x).h, df(y).k \rangle.$$

En déduire que $df(x) = df(y)$ pour tous $x, y \in \Omega_{x_0}$.

d) Démontrer que f est une transformation affine.

Exercice 21 Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et ω une forme différentielle sur Ω, ie

$$\omega : (x, y) \mapsto a(x, y)dx + b(x, y)dy,$$

avec a et b de classe C^1 sur Ω, à valeurs réelles.

a) À $(x, y) \in \Omega$ fixé, à quel ensemble appartient $\omega(x, y)$?

b) Montrer que si il existe f de classe C^2 telle que $\omega = df$, alors

$$\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x}, \qquad \text{sur } \Omega. \qquad\qquad (\mathrm{F})$$

c) Supposons $0 \in \Omega$ et Ω étoilé par rapport à 0. Montrer que si (F) a lieu alors, il existe f de classe C^1 telle que $\omega = df$. (Indication : considérer $(x, y) \mapsto \int_0^1 a(tx, ty)x + b(tx, ty)ydt$.)

Exercice 22 [Équation des ondes dans $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x$] On veut résoudre le problème d'inconnue u, fonction C^2 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) & = & 0, & \text{sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) & = & u_0(x), & \text{sur } \mathbb{R}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(t, x) & = & u_1(x), & \text{sur } \mathbb{R}, \end{array}$$

où u_0 de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et u_1 de classe C^1 sont données.

a) Montrer que si u est une solution C^2 du problème, alors $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x}$ vérifient des équations de transport (voir Exercice 12) à déterminer.

b) En déduire l'existence et l'unicité d'une solution C^2 au problème de départ. (On pourra utiliser l'Exercice 12.)

Exercice 23 Étudier les extrema (relatifs et absolus) de

$$(x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x - y)^2.$$

Exercice 24 Pour une fonction f de classe C^2 sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, on rappelle que le Laplacien est

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

a) Montrer que si f a un minimum (resp. maximum) local en un point $a \in \Omega$, alors la hessienne de f en a est positive (resp. négative).

b) En déduire que si f a un minimum (resp. maximum) local en un point $a \in \Omega$, alors $\Delta f(a) \geq 0$ (resp. ≤ 0).

Exercice 25 [Formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2]

a) Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice symétrique réelle. Pour chaque $X \in \mathbb{R}^n$, exprimer la quantité

$$^tXAX$$

en fonction des a_{ij}, avec $j \geq i$, et des composantes $x_1, \dots, x_n$ de X.

b) Soit φ de classe C^2 sur un intervalle $[a, b]$. Montrer que

$$\varphi(b) = \varphi(a) + \varphi'(a)(b-a) + \int_0^1 (1-t)\varphi''\big(a + t(b-a)\big)dt(b-a)^2.$$

c) Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2 sur un ouvert convexe $\Omega \subset E$. Montrer que

$$f(x+h) = f(x) + df(x).h + \int_0^1 (1-t)\big(d^2 f\big)(x+th).(h,h)dt,$$

pour tous $x \in \Omega$ et h tel que $x + h \in \Omega$.

d) Lorsque $E = \mathbb{R}^n$, réécrire cette formule en terme des dérivées partielles de f.