Université de Toulouse III, Département de Mathématiques L3 Mathématiques (MMESI)

Calcul Différentiel - Contrôle du 17 février 2012
Durée : 2 heures
Aucun document ni instrument de calcul n'est autorisé.

---

1. Soit f une application de E dans F, espaces vectoriels normés, et supposons f différentiable en a; montrer que pour tout vecteur $u \in E \setminus \{0\}$, la dérivée
$$\frac{\partial f}{\partial u}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\big(f(a+hu) - f(a)\big)$$
de f en a dans la direction u existe, et l'exprimer à l'aide de $df(a)$.

2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0)$$
et $f(0,0) = 0$.
   (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$ et que pour tout $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, la dérivée $\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)$ dans la direction u existe
   (b) Calculer la matrice jacobienne $J_f(0,0)$ de f au point $(0,0)$.
   (c) Est-ce que f est de classe C^1sur $\mathbb{R}^2$? Justifier la reponse.
   (d) Etudier la différentiabilité de f en $(0,0)$.

3. Soit $\mathcal{F}$ l'algèbre des matrices carrés $p \times p$ munie d'une norme $\|.\|$, telle que
$$\forall A, B \in \mathcal{F}, \quad \|AB\| \leqslant \|A\|.\|B\|.$$
   (a) Montrer que l'application
$$f : \mathcal{F} \to \mathcal{F} : A \mapsto A^2$$
   est différentiable et déterminer sa différentielle $df(A)$.
   (b) Soit $g : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ l'application qui associe à une matrice A son determinant $g(A) = \det(A)$. Montrer que g est différentiable. Est-elle continue, de classe C^1 sur $\mathcal{F}$? Justifier la réponse.
   (c) Montrer que $dg(I).H = Trace(H)$ (on pourra étudier au préalable le cas $p = 2$)
   (d) On désigne par $U = \{A \in \mathcal{F} : det(A) \neq 0\}$, l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{F}$. Montrer que U est un ouvert de $\mathcal{F}$ et calculer la différentielle de l'application $A \mapsto A^{-1}$ de U dans U.
   Indication: Si $H \in \mathcal{F}$ et $\|H\| < 1$, verifier que la série $\sum_{i=0}^{\infty} H^i$ converge dans $\mathcal{F}$ et que
$$(I - H)(I + H + H^2 + \dots) = I.$$
   En déduire $(I-H)^{-1}$, puis $(A+H)^{-1}$ (si $\|A^{-1}H\| < 1$).