Université de Toulouse III, Département de Mathématiques L3 Mathématiques (MMESI)

Calcul Différentiel - Contrôle du 6 avril 2012
Durée : 2 heures
Aucun document ni instrument de calcul n'est autorisé.

---

1. Pour chacune des fonctions suivantes déterminer la nature des points critiques (minimum ou maximum local, point selle). :
   (a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$
   (b) $f(x, y) = (y - x^2)(y - 2)$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x^3 + x(y^2 - 1)$.
   (a) Etudier la nature des points critiques de f.
   (b) Montrer que f a un maximum M et un minimum m sur le disque compact
   $$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}.$$
   (c) Montrer que $m < 0 < M$. Calculer m et M.
3. (a) Montrer, en utilisant le théorème de Cauchy-Lipschitz, que pour tout $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ il existe un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant x_0 et une fonction unique $\varphi(x)$ de classe $C^1(I)$ telle que
   $$\varphi'(x) = \varphi(x) + x \text{ et } \varphi(x_0) = y_0. \tag{1}$$
   (b) Montrer que pour tout k entier positif la fonction φ est de classe $C^k(I)$ et calculer $\varphi^{(k)}(x_0)$.
   (c) Résoudre l'équation différentielle
   $$y' = y + x. \tag{2}$$
   Si φ est une solution maximale de (2), quelle est son intervalle de définition?
4. On considère l'équation différentielle (de Bernoulli) sur $\mathbb{R}$:
   $$y' + y + xy^2 = 0. \tag{3}$$
   (a) En supposant que $y \neq 0$, transformer l'équation (3) par la substitution $y = 1/z$ en une équation de la forme $z' = f(z, x)$ qu'on résoudra.
   (b) Montrer que pour tout $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ il existe un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant x_0 et une solution unique $y(x)$ de (3), telle que $y(x_0) = y_0$. Expliciter cette solution si $y_0 \neq 0$ et si $y_0 = 0$.
   (c) Calculer explicitement la solution maximale de (3), telle que $y(0) = 1$. Quelle est son intervalle de définition?