

PARTIE I

ANALYSE

CHAPITRE 1

**SUITES ET SÉRIES
NUMÉRIQUES**

Programme officiel

I. Les nombres réels

Propriétés des nombres réels

Relation d'ordre, partie entière, valeur absolue, intervalles (ouverts, fermés, semi-ouverts), majorations et minoration, borne supérieure et inférieure. Les candidats doivent connaître la propriété "une partie non vide et majorée de \mathbb{R} admet une borne supérieure" et savoir l'utiliser à bon escient (suites monotones et adjacentes, en particulier).

Suites de nombres réels

Définition d'une suite de réels, d'une suite extraite. Définition d'une suite convergente et de sa limite. \mathbb{R} -algèbre des suites convergentes et opérations algébriques sur les limites. Comparaisons (notations O et o , équivalence). Définition d'une suite de Cauchy. Une suite de nombres réels est convergente si et seulement si elle est de Cauchy (le "si" est admis). Densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} et approximation décimale. Théorème de Bolzano-Weierstrass.

II. Fonctions réelles d'une variable réelle

Propriétés locales

Limite en un point $a \in \mathbb{R}$ et en $\pm\infty$, limites à droite et à gauche. Continuité en un point $a \in \mathbb{R}$. Opérations algébriques sur les limites, limite d'une fonction composée. Relations de comparaison, équivalence et développements limités.

Fonctions continues sur un intervalle

\mathbb{R} -algèbre $C(I)$ des fonctions continues sur un intervalle I . Continuité d'une fonction composée, continuité de $|f|$. L'image continue d'un intervalle est un intervalle et l'image continue d'un segment est un segment (les deux résultats sont admis). Une application $f \in C(I)$ est bijective si et seulement si elle est monotone, son application réciproque est alors continue sur $f(I)$.

Calcul différentiel

Dérivée en un point, dérivées à droite et à gauche. Opérations algébriques sur les dérivées. Dérivée d'une fonction composée. Fonction dérivée d'une fonction définie sur un intervalle. Dérivée d'une fonction réciproque. \mathbb{R} -algèbre $C^p(I)$ des fonctions de classe C^p sur un intervalle I . Théorème de Rolle ; théorème des accroissements finis et applications usuelles. Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre p pour une fonction de classe C^{p+1} . Formule de Taylor-Young à l'ordre p pour une fonction de classe C^p et calcul du développement limité à l'ordre p en un point $a \in I$ d'une fonction de $C^p(I)$.

Intégration

Intégrales généralisées absolument convergentes

Vu plus tard dans le semestre.

Applications

Discussion d'une équation $f(x) = 0$, et résolution approchée (par la méthode de Newton, par dichotomie). Étude de suite récurrentes : $u_{n+1} = f(u_n)$.

III. Nombres complexes

Corps \mathbb{C} des complexes : les nombres complexes $x + iy$ sont les points (x, y) du plan Euclidien $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sur lequel est défini, de plus, une multiplication.

Définition de $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$, formules d'Euler et formule de Moivre. Définition de l'exponentielle d'un nombre complexe $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ et des fonctions associées (\sin , \cos , \tan , \sinh , \cosh , \tanh). Module et argument d'un nombre complexe. Résolution dans \mathbb{C} de $z^n = a$, racines de l'unité. Les candidats doivent connaître les interprétations géométriques des transformations : $z \mapsto \bar{z}$, $z \mapsto a + z$, $z \mapsto az + b$. Inégalité triangulaire. Suites de nombres complexes. Suite convergente et limite. Critère de Cauchy pour les suites de nombres complexes.

IV. Séries de nombres réels ou complexes

Définition d'une série. Définition d'une série convergente et de sa somme. Condition de Cauchy : une série est convergente si et seulement si la suite de ses sommes partielles est de Cauchy. Séries absolument convergentes. Espace vectoriel des séries convergentes.

Séries à termes réels positifs : séries de Riemann et série géométrique. Théorème de comparaison, règle de d'Alembert utilisant la limite usuelle.

Convergence d'une série alternée dont la valeur absolue du terme général décroît vers 0 et majoration du reste.

Dans le programme de la partie II

Compléments sur les séries de nombres réels ou complexes

Définition du produit de Cauchy de deux séries. Convergence de la série produit de deux séries absolument convergentes.

Suites numériques

I. Exemples

A. $u_n = f(n)$

- $u_n = n^2 + 1$ (polynôme en n),
- $u_n = \frac{1}{n-4}$, $u_n = \frac{3n-2}{4n+1}$ (fractions rationnelles en n),
- $u_n = k^n$ (suite géométrique de raison k),
- $u_n = \sin(n)$, ...

B. Suites définies par récurrence

- $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n^2 + 5$,
- $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ (suite de Fibonacci, 1202),
- $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n - 1}$ (suite homographique),
- système : $\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) \end{cases}$

C. Suites définies par des sommes

1. séries : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

- $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ (série harmonique),

- $S_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ (série de Riemann),

- $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}$ (série géométrique).

2. sommes de Riemann : $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$

3. sommes de Césaro : $u_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ (moyenne des a_k).

II. Étude d'une suite

A. La suite est-elle bien définie pour tout n ?

S'il s'agit d'une suite de la forme $u_n = f(n)$, il suffit d'étudier le domaine de définition de f .

S'il s'agit d'une suite définie par récurrence, il faut en général faire une démonstration par récurrence.

Rappel: pour faire une démonstration par récurrence:

1. On définit l'hypothèse de récurrence au rang n .
2. On vérifie l'hypothèse de récurrence au premier rang.
3. On montre que si l'hypothèse de récurrence est vraie au rang n , alors elle est vraie au rang $n + 1$.

B. On peut s'intéresser au sens de variation de la suite.

Définition 1. – (u_n) est croissante si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n .

– (u_n) est décroissante si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout n .

Dans le cas d'une suite $u_n = f(n)$, il suffit d'étudier le sens de variation de f .

Dans le cas d'une suite définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, il faut en général étudier le signe de $f(x) - x$.

III. Suite convergente

Définition 2. La suite (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, u_n appartient à l'intervalle $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ pour n assez grand.

On dit que u_n tend vers ℓ . On dit que ℓ est la limite de la suite u_n . On note $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ ou plus simplement $u_n \rightarrow \ell$.

Proposition 1 (unicité de la limite). Si (u_n) admet une limite, elle n'en a qu'une.

Proposition 2 (opérations sur les limites). Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes. Alors $(u_n + v_n)$, $(u_n - v_n)$ et $(u_n v_n)$ convergent. C'est aussi le cas de (u_n/v_n) si $\lim v_n \neq 0$. De plus :

$$\lim(u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n, \quad \lim(u_n - v_n) = \lim u_n - \lim v_n,$$

$$\lim(u_n v_n) = \lim u_n \cdot \lim v_n, \quad \lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n}.$$

Proposition 3. Soit (u_n) une suite bornée et (v_n) une suite de limite nulle. Alors, $(u_n v_n)$ converge vers zéro.

Proposition 4. Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles convergentes telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang. Alors $\lim u_n \leq \lim v_n$.

Attention, même si $u_n < v_n$ pour tout n , on ne peut pas dire plus que $\lim u_n < \lim v_n$. On peut perdre l'inégalité stricte en passant à la limite. C'est le cas par exemple pour $u_n = -1/n$ et $v_n = 1/n$.

Proposition 5 (théorème des gendarmes). Soit (a_n) et (b_n) deux suites réelles ayant même limite ℓ . Si (u_n) est une suite réelle vérifiant $a_n \leq u_n \leq b_n$ à partir d'un certain rang, alors (u_n) converge vers ℓ .

Proposition 6. Si la suite (u_n) est définie par récurrence $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, si u_n converge vers ℓ et si f est continue en ℓ , alors $f(\ell) = \ell$.

Définition 3. La suite u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad u_n \geq A.$$

On note $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

Définition 4. La suite u_n tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad u_n \leq A.$$

On note $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$.

Il faut faire attention lorsque l'on manipule des opérations sur les limites infinies. En particulier, on a des *formes indéterminées* lorsque l'on est amené à faire les opérations suivantes :

- $(+\infty) - (+\infty)$ ou $(+\infty) + (-\infty)$.
- $0 \times \infty$.
- ∞/∞ .
- 1^∞ . Exemple à connaître par coeur : $(1 + 1/n)^n \rightarrow e$.

IV. Relations de comparaison

Définition 5 (Notations de Landau).

1. équivalent : $u_n \sim v_n$ si $u_n = s_n v_n$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = 1$.
2. petit o : $u_n = o(v_n)$ si $u_n = \varepsilon_n v_n$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$.
3. grand O : $u_n = O(v_n)$ si $u_n = A_n v_n$ avec A_n une suite bornée.

Proposition 7. $u_n \sim v_n$ si et seulement si $v_n \sim u_n$.

Proposition 8. Si $u_n \sim v_n$ alors les deux suite sont de même nature:

- Si l'une converge, l'autre converge vers la même limite.
- Si l'une diverge, l'autre diverge.
- Si $u_n \rightarrow +\infty$, alors $v_n \rightarrow +\infty$.
- Si $u_n \rightarrow -\infty$, alors $v_n \rightarrow -\infty$.
- u_n et v_n sont de même signe pour n assez grand.

V. Suites de Cauchy

Définition 6. On dit que (u_n) est une suite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+p} - u_n| \leq \varepsilon.$$

Proposition 9. Une suite réelle est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.

VI. Suites monotones

Théorème et définition. Toute partie non vide et majorée $A \subset \mathbb{R}$ admet un plus petit majorant. C'est *la borne supérieure de A* notée $\sup(A)$:

$$\begin{cases} \forall x \in A, & x \leq \sup(A) \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A, & x_\varepsilon > \sup(A) - \varepsilon. \end{cases}$$

Théorème et définition. Toute partie non vide et minorée $A \subset \mathbb{R}$ admet un plus petit minorant. C'est *la borne inférieure de A* notée $\inf(A)$.

$$\begin{cases} \forall x \in A, & x \geq \inf(A) \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A, & x_\varepsilon < \inf(A) + \varepsilon. \end{cases}$$

Ce résultat sert à démontrer que toute suite croissante et majorée converge et que deux suites adjacentes convergent et ont même limite. Les démonstrations doivent être connues.

Proposition 10. Toute suite croissante et majorée converge. Toute suite décroissante et minorée converge.

Définition 7. Deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si l'une est croissante, l'autre est décroissante et si $u_n - v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Proposition 11. Deux suites adjacentes sont convergentes et convergent vers la même limite.

VII. Théorème de Bolzano-Weierstrass

Définition 8. On dit que (v_n) est une suite extraite de la suite (u_n) s'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $v_n = u_{\varphi(n)}$.

Proposition 12. La suite (u_n) converge vers ℓ si et seulement si toute suite extraite converge vers ℓ .

Proposition 13 (théorème de Bolzano-Weierstrass). De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

Activités traitées en cours

Activité 1 (Annales 2003). Soit deux suites de réels (v_n) et (w_n) adjacentes c'est-à-dire que :

(v_n) est croissante, (w_n) est décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - w_n) = 0$.

1. Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, $v_n \leq w_n + 1$.
En déduire que la suite (v_n) est majorée.
2. Montrer que la suite (w_n) est minorée.
3. En déduire que les suites (v_n) et (w_n) sont convergentes et convergent vers une même limite réelle.

Activité 2 (Annales 2006). Étude d'une suite récurrente.

On note I l'intervalle $\left]0; \frac{1}{\sqrt{6}}\right[$. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier non nul n par $u_{n+1} = u_n - 2u_n^3$ et $u_1 = \frac{1}{10}$.

On note f la fonction définie sur I par $f(x) = x - 2x^3$.

1. Étude de la convergence
 - (a) Déterminer les variations de f sur I puis comparer $f(I)$ et I .
 - (b) Déterminer la monotonie de la suite (u_n) .
 - (c) Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

2. Théorème de Cesàro

Soit (v_n) une suite définie pour tout entier naturel non nul n , qui converge vers un réel ℓ .

On définit alors la suite (M_n) pour tout entier naturel non nul n , par $M_n = \frac{1}{n}(v_1 + v_2 + \dots + v_n)$.

M_n est la moyenne arithmétique des n premiers termes de la suite (v_n) .

- (a) Traduire à l'aide de quantificateurs le fait que la suite (v_n) converge vers ℓ .
- (b) Soit n un entier naturel non nul, et p un entier tel que $1 \leq p \leq n$. Montrer que

$$|M_n - \ell| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^p |v_k - \ell| + \max_{p < k \leq n} |v_k - \ell|.$$

- (c) Conclure avec soin que si la suite (v_n) converge vers ℓ , alors (M_n) converge aussi vers ℓ (ce résultat porte le nom de théorème de Cesàro).

3. Applications à la recherche d'un équivalent de (u_n)

- (a) Déterminer la limite de $\frac{1}{(x - 2x^3)^2} - \frac{1}{x^2}$ lorsque x tend vers 0.

En déduire la limite de la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$.

- (b) Utiliser tous les résultats précédents pour donner un équivalent au voisinage de $+\infty$ de la suite (u_n) (on pourra simplifier $\sum_{k=1}^n v_k$).

Développements limités et équivalents

Revoir les développements limités usuels et les équivalents.

I. Définition d'un DL

Définition 1 (Développement limité à l'ordre n en x_0). Soit f définie au voisinage de x_0 . On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 si on peut écrire

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Proposition 1 (Unicité). Il y a au plus un développement limité d'ordre n en x_0 .

Proposition 2 (Parité et DL en 0). Si f est paire, le DL en 0 ne contient que des exposants pairs. Si f est impaire, le DL en 0 ne contient que des exposants impairs.

Proposition 3 (DL de Taylor). Soit f une fonction C^n au voisinage de x_0 . Alors, f admet un DL à l'ordre n en x_0 et

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x),$$

avec $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$.

II. Opérations sur les DL

N.B. Ne pas oublier que pour les fonctions C^∞ (cas usuel), on peut toujours utiliser le théorème fondamental (Proposition 3).

Supposons que f et g admettent un DL d'ordre n en 0.

Proposition 4 (Addition de deux DL). $f + g$ admet un DL d'ordre n en 0 obtenu en ajoutant les DL de f et de g .

Proposition 5 (Produit de deux DL). $f \cdot g$ admet un DL d'ordre n en 0 obtenu en multipliant les DL de f et de g et en ne conservant que les termes de degré $\leq n$.

Proposition 6 (Quotient de deux DL). Si $g(0) \neq 0$, alors, f/g admet un DL d'ordre n en 0 obtenu en divisant suivant les puissances croissantes à l'ordre n le DL de f par le DL de g .

Proposition 7 (Composition). Si $f(0) = 0$, alors, $g \circ f$ admet un DL d'ordre n en 0 obtenu de la manière suivante :

- dans le DL de g on remplace x par le DL de f
- on ne conserve que les termes de degré $\leq n$.

Proposition 8 (Dérivation). Si on connaît un DL de f en 0 à l'ordre n , on obtient un DL de f' en 0 à l'ordre $n - 1$ en dérivant terme à terme le DL de f .

Proposition 9 (Intégration). Si on connaît un DL de f' en 0 à l'ordre n , on obtient un DL de f en 0 à l'ordre $n + 1$ en intégrant terme à terme le DL de f' et en rajoutant $f(0)$.

III. Formulaire de DL en 0

Trois formules fondamentales :

1. DL de Taylor

$$2. \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + x^n \varepsilon(x)$$

$$3. (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \overbrace{\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}}^{n \text{ termes}} x^n + x^n \varepsilon(x).$$

A l'aide de (1) :

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x) \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x) \\ \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2} \varepsilon(x) \\ \text{ch}(x) &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x) \\ \text{sh}(x) &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2} \varepsilon(x) \end{aligned}$$

En dérivant et à l'aide de (2) :

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + x^n \varepsilon(x) \\ \text{Arctan}(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2} \varepsilon(x) \\ \text{Argth}(x) &= x + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2} \varepsilon(x) \end{aligned}$$

En dérivant et à l'aide de (3) :

$$\text{Arcsin}(x) = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \dots + \overbrace{\frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)}}^{n \text{ termes}} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2} \varepsilon(x)$$

$$\text{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}(x)$$

$$\text{Argsh}(x) = x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \overbrace{\frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)}}^{n \text{ termes}} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2} \varepsilon(x)$$

Pour mieux mémoriser : le “clan” des huit fonctions impaires

Tous les DL commencent pas x . Le coefficient du terme en x^3 change de signe quand on passe de f à f^{-1} .

| | |
|--|--|
| $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x)$ | $\text{Arcsin}(x) = x + \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x)$ |
| $\text{sh}(x) = x + \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x)$ | $\text{Argsh}(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x)$ |
| $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + x^4\varepsilon(x)$ | $\text{Arctan}(x) = x - \frac{x^3}{3} + x^4\varepsilon(x)$ |
| $\text{th}(x) = x - \frac{x^3}{3} + x^4\varepsilon(x)$ | $\text{Argth}(x) = x + \frac{x^3}{3} + x^4\varepsilon(x)$ |

IV. Équivalents

Définition 2. Soient f et g deux fonctions définies et non nulles au voisinage de $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

On dit que f et g sont équivalentes en a si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. On note alors $f \sim_a g$ (ou plus simplement $f \sim g$).

Proposition 10. Si $f \sim_a g$, alors $g \sim_a f$.

Proposition 11 (Théorème fondamental). Si f et g sont équivalentes en a , soit elles ont toutes deux la même limite (finie ou infinie) en a , soit aucune d'elles n'a de limite en a .

Proposition 12. Une fonction est équivalente en x_0 au premier terme non nul de son D.L. en x_0 .

V. Opérations sur les équivalents

Proposition 13. Si $f_1 \sim_a g_1$ et si $f_2 \sim_a g_2$, alors $f_1 \cdot f_2 \sim_a g_1 \cdot g_2$.

Proposition 14. Si $f_1 \sim_a g_1$ et si $f_2 \sim_a g_2$, alors $f_1/f_2 \sim_a g_1/g_2$.

Proposition 15. Si $f \sim_a g$, alors $|f| \sim_a |g|$.

Proposition 16. Si $f \sim_a g$, alors pour x suffisamment proche de a , $f(x)$ et $g(x)$ sont de même signe.

Attention : on n'a pas le droit d'ajouter des équivalents.

En effet, même si $f_1 \sim_a g_1$ et $f_2 \sim_a g_2$, il se peut que $f_1 + f_2$ et $g_1 + g_2$ ne soient pas équivalentes en a . Par exemple,

$$\sin(x) \sim_0 x, \quad -x \sim_0 -x \quad \text{mais} \quad \sin(x) - x \sim_0 -\frac{x^3}{6} \not\sim_0 x - x = 0.$$

Attention lorsque l'on veut composer des équivalents :

$$\frac{1}{x} + 1 \sim_0 \frac{1}{x} \quad \text{mais} \quad e^{1+1/x} = e \cdot e^{1/x} \not\sim_0 e^{1/x}.$$

Exercices. Feuille 1.

Exercice 1 : Calculer les limites des suites suivantes :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \ln \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n - 1}, & \text{(b)} \quad & \left(1 - \frac{3}{n}\right)^{2n}, & \text{(c)} \quad & \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1} \\ \text{(d)} \quad & \frac{n!}{n^n + 2n + \ln(n)}, & \text{(e)} \quad & \frac{n^{\ln n}}{n^n}, & \text{(f)} \quad & \frac{n^2}{n!} \end{aligned}$$

Exercice 2 : La suite de terme général $v_n = (-1)^n \frac{n^2 + 1}{2n + 1} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ est-elle convergente ? Si oui, déterminer la limite.

Exercice 3 : Déterminer la limite de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ pour les suites suivantes :

$$\begin{aligned} \text{(g)} \quad & \frac{n^a}{a^n}, \quad a \in \mathbb{R}_+^*, & \text{(h)} \quad & \frac{n!}{a^n}, \quad a \in \mathbb{R}_+^*, & \text{(i)} \quad & \left(\frac{1}{n+1}\right)^n. \end{aligned}$$

Exercice 4 : (Annales 2008)

Justifier que pour n au voisinage de $+\infty$, on a $\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 5 : (Annales 2009)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}$.

Démontrer que pour n au voisinage de $+\infty$, $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \sim \frac{\alpha}{n^2}$ où α est un réel à déterminer.

Exercice 6 : Théorème de Cesàro (Annales 2006)

Soit (v_n) une suite définie pour tout entier naturel non nul n , qui converge vers un réel ℓ . On définit alors la suite (M_n) pour tout entier naturel non nul n , par

$$M_n = \frac{1}{n}(v_1 + v_2 + \cdots + v_n).$$

M_n est la moyenne arithmétique des n premiers termes de la suite (v_n) .

1. Traduire à l'aide de quantificateurs le fait que la suite (v_n) converge vers ℓ .
2. Soit n un entier naturel non nul, et p un entier tel que $1 \leq p \leq n$. Montrer que

$$|M_n - \ell| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^p |v_k - \ell| + \max_{p < k \leq n} |v_k - \ell|.$$

3. Conclure avec soin que si la suite (v_n) converge vers ℓ , alors (M_n) converge aussi vers ℓ .

Suggestion d'exos au choix en supplément de la feuille 1.

- Exercice 1 :**
1. Donner un équivalent simple de $n^2 + 3n$ lorsque $n \rightarrow \infty$.
 2. Etudier la limite éventuelle lorsque $n \rightarrow \infty$ de $u_n = \ln(n^2 + 3n) - \ln(n^2)$.
 3. Donner un équivalent simple de u_n lorsque $n \rightarrow \infty$.

Exercice 2 : Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $x \mapsto \frac{\ln(\cos x)}{(\sin x)^2}$.

Exercice 3 : (Annales 2006) **Étude d'une suite récurrente.**

Les questions 1. et 2. ont déjà été traitées.

On note I l'intervalle $\left]0; \frac{1}{\sqrt{6}}\right[$. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier non nul n par $u_{n+1} = u_n - 2u_n^3$ et $u_1 = \frac{1}{10}$.

On note f la fonction définie sur I par $f(x) = x - 2x^3$.

1. Étude de la convergence

- (a) Déterminer les variations de f sur I puis comparer $f(I)$ et I .
- (b) Déterminer la monotonie de la suite (u_n) .
- (c) Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

2. Théorème de Cesàro

Soit (v_n) une suite définie pour tout entier naturel non nul n , qui converge vers un réel ℓ .

On définit alors la suite (M_n) pour tout entier naturel non nul n , par $M_n = \frac{1}{n}(v_1 + v_2 + \dots + v_n)$.

M_n est la moyenne arithmétique des n premiers termes de la suite (v_n) .

- (a) Traduire à l'aide de quantificateurs le fait que la suite (v_n) converge vers ℓ .
- (b) Soit n un entier naturel non nul, et p un entier tel que $1 \leq p \leq n$. Montrer que

$$|M_n - \ell| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^p |v_k - \ell| + \max_{p < k \leq n} |v_k - \ell|.$$

- (c) Conclure avec soin que si la suite (v_n) converge vers ℓ , alors (M_n) converge aussi vers ℓ (ce résultat porte le nom de théorème de Cesàro).

3. Applications à la recherche d'un équivalent de (u_n)

- (a) Déterminer la limite de $\frac{1}{(x - 2x^3)^2} - \frac{1}{x^2}$ lorsque x tend vers 0.

En déduire la limite de la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$.

- (b) Utiliser tous les résultats précédents pour donner un équivalent au voisinage de $+\infty$ de la suite (u_n) (on pourra simplifier $\sum_{k=1}^n v_k$).

Exercice 4 : Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \geq 0, u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Donner le tableau de variation de f et déterminer ses points fixes.
2. Montrer que $\forall u_0 \in \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$, la suite u_n est croissante. Est-elle convergente?
3. (a) Montrer que les intervalles $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right]$ et $\left[0, \frac{1}{4} \right]$ sont stables par f .
(b) Montrer que $\forall u_0 \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right]$, la suite (u_n) est décroissante. Est-elle convergente?
(c) Montrer que $\forall u_0 \in \left[0, \frac{1}{4} \right]$, la suite (u_n) est croissante. Est-elle convergente?
4. Conclusion.

Séries numériques

I. Définitions

Définition 1. Soit $(a_k)_{k \geq 0}$ une suite de nombres réels (ou complexes). La *série de terme général* a_k est la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ définie par $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ (on dit que S_n est une *somme partielle* de la série).

La série de terme général a_k se note $\sum a_k$ ou $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Définition 2. On dit que la série $\sum a_n$ converge (respectivement diverge) si la suite des *sommes partielles* S_n converge (respectivement ne converge pas). Dans ce cas, on note $S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ la valeur de la limite. On dit que S est la *somme de la série*.

Attention, quand la série $\sum a_n$ converge, la notation $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ est utilisée à la fois pour désigner la série et la valeur de la somme (c'est-à-dire la limite de la suite (S_n)).

II. Exemples

1. $a_k = 1$, $S_n = n + 1 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$, la série diverge.

2. série géométrique : $a_k = \frac{1}{2^k}$, $S_n = \sum_{k=0}^n a_k = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 2$, la série converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 2.$$

3. série télescopique : $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$, voir exercice 3 de la feuille 2 de TD.

Pour tous ces exemples, on sait calculer S_n . Mais ce n'est généralement pas le cas.

III. Critère de Cauchy

Proposition 1 (critère de Cauchy). La série $\sum a_k$ converge si, et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, \forall p \geq 0, |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| \leq \varepsilon.$$

Preuve : c'est le critère de Cauchy pour la suite (S_n) en observant que :

$$S_{n+p} - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}.$$

Corollaire. Si la série $\sum a_k$ converge, alors $a_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$.

Si $a_k \not\xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$, alors la série $\sum a_k$ diverge.

Preuve : on applique le critère de Cauchy avec $p = 1$. □

Attention :

$$a_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0 \text{ n'implique pas } \sum a_k \text{ converge.}$$

Contre-exemple : la série harmonique $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Preuve : le critère de Cauchy n'est pas satisfait. En effet, pour tout $n \geq 0$,

$$\underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\geq 1/2n} + \underbrace{\frac{1}{n+2}}_{\geq 1/2n} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{n+n}}_{\geq 1/2n} \geq n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

□

IV. Espace vectoriel des séries convergentes

Proposition 2. Si $\sum a_k$ et $\sum b_k$ sont deux séries convergentes, alors $\sum (a_k + b_k)$ est une série convergente et :

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et si $\sum a_k$ est une série convergente, alors $\sum (\lambda a_k)$ est une série convergente et :

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Corollaire. Si $\sum a_k$ converge et si $\sum b_k$ diverge, alors $\sum (a_k + b_k)$ diverge.

Preuve: $b_k = (a_k + b_k) - a_k$. Si $\sum a_k$ converge et si $\sum (a_k + b_k)$ converge, alors $\sum b_k$ converge. □

V. Séries à termes positifs

Proposition 3. Si $\sum a_k$ est une série à termes positifs, la suite (S_n) des sommes partielles est croissante.

Corollaire. Si $\sum a_k$ est une série à termes positifs, elle est convergente si et seulement si elle est majorée.

Preuve : une suite croissante est convergente si, et seulement si, elle est majorée. □

Proposition 4 (comparaison). Supposons que $0 \leq a_k \leq b_k$.

- Si $\sum b_k$ converge, alors $\sum a_k$ converge.
- Si $\sum a_k$ diverge, alors $\sum b_k$ diverge.

Preuve : Soit (A_n) (respectivement (B_n)) la suite des sommes partielles de la série de terme général a_k (respectivement b_k). Alors,

$$\sum b_k \text{ converge} \Rightarrow (B_n) \text{ est majorée} \Rightarrow (A_n) \text{ est majorée} \Rightarrow \sum a_k \text{ converge.}$$

□

Proposition 5 (équivalents). Si $0 \leq a_k \sim b_k \geq 0$, alors $\sum a_k$ et $\sum b_k$ sont de même nature (l'une est convergente si, et seulement si, l'autre est convergente).

Si elles divergent, les sommes partielles sont équivalentes.

Si elles convergent, les restes sont équivalents.

Preuve que les séries sont de même nature : Comme $a_k/b_k \rightarrow 1$, si k est suffisamment grand, alors $\frac{1}{2} \leq \frac{a_k}{b_k} \leq \frac{3}{2}$. Par conséquent, $\frac{1}{2}b_k \leq a_k \leq \frac{3}{2}b_k$. Le résultat suit du théorème de comparaison. \square

Attention, si $a_k \sim b_k$ sans que les a_k soient positifs, les séries $\sum a_k$ et $\sum b_k$ ne sont pas nécessairement de même nature.

Contre-exemple : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ et $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k} + (-1)^k}$ (voir exercice 4 de la feuille 2 de TD).

Séries à termes positifs de référence

1. séries géométriques : $\sum r^n$ converge si, et seulement si, $|r| < 1$. Alors :

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}.$$

2. séries de Riemann : $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

VI. Séries alternées

Définition 3. La série $\sum a_k$ est une série alternée si

- $a_k \geq 0$ pour k pair et $a_k \leq 0$ pour k impair (ou vice et versa),
- la suite $|a_k|$ est décroissante
- la suite a_k converge vers 0.

Proposition 6. Si $\sum a_k$ est une série alternée (**il faut vérifier les 3 conditions**), alors la série $\sum a_k$ est convergente. De plus :

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} a_k - \sum_{k=0}^n a_k \right| \leq |a_{n+1}|.$$

Exemple : la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ est convergente.

Preuve : On va le montrer dans le cas où $a_{2n} \geq 0 \geq a_{2n+1}$. L'autre cas est similaire.

Soit S_n la somme partielle de rang n . On montre que les suites $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ sont des suites adjacentes. Plus précisément, comme $0 \leq a_{2n+2} \leq -a_{2n+1} \leq a_{2n}$, on a :

$$S_{2n+1} = S_{2n-1} + a_{2n} + a_{2n+1} \geq S_{2n-1}$$

et

$$S_{2n+2} = S_{2n} + a_{2n+1} + a_{2n+2} \leq S_{2n}.$$

De plus :

$$S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Comme les suites sont adjacentes, elles convergent vers la même limite S (qui est la somme de la série). De plus, pour tout $n \geq 0$, on a :

$$|S - S_n| \leq |S_{n+1} - S_n| = |a_{n+1}|.$$

□

VII. Séries absolument convergentes

Définition 4. On dit que la série $\sum a_k$ est absolument convergente si la série $\sum |a_k|$ est convergente.

Proposition 7. Si la série $\sum a_k$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

Preuve : on applique le critère de Cauchy dans les deux sens. La série $\sum |a_k|$ converge. Donc, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$ et $p \geq 0$, on a :

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+p}| \leq \varepsilon.$$

Alors, d'après l'inégalité triangulaire :

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| \leq \varepsilon.$$

□

Attention, il y a des séries qui sont convergentes sans être absolument convergente, par exemple la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

Proposition 8 (critère de d'Alembert). Si $|a_{k+1}/a_k| \rightarrow \ell$ alors,

- si $\ell < 1$, la série $\sum a_k$ converge,
- si $\ell > 1$, la série $\sum a_k$ diverge,
- si $\ell = 1$, on ne peut rien dire.

Attention, il se peut que la série $\sum a_k$ soit convergente sans que la suite $|a_{k+1}/a_k|$ n'ait de limite.

Exercices. Feuille 2.

Exercice 1 : Déterminer si les séries suivantes convergent :

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \sum_{n \geq 1} \ln \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n - 1}, & \text{(b)} \sum_{n \geq 1} \left(1 - \frac{3}{n}\right)^{2n}, & \text{(c)} \sum_{n \geq 1} \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1} \\
 \text{(d)} \sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n + 2n + \ln(n)}, & \text{(e)} \sum_{n \geq 1} \frac{n^{\ln n}}{n^n}, & \text{(f)} \sum_{n \geq 1} \frac{n^2}{n!}
 \end{array}$$

Exercice 2 : En utilisant le critère de d'Alembert, déterminer la nature des séries de terme général suivant:

$$\text{(g)} \frac{n^a}{a^n}, \quad a \in \mathbb{R}_+^*, \quad \text{(h)} \frac{n!}{a^n}, \quad a \in \mathbb{R}_+^*, \quad \text{(i)} \left(\frac{1}{n+1}\right)^n.$$

Exercice 3 : Soit la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$, $n \geq 1$. Calculer $\sum_{k=1}^n u_k$ en décomposant u_n en éléments simples. En déduire que cette série converge et donner la valeur de sa somme.

Exercice 4 : On considère les suites équivalentes $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Montrer que $\sum v_n$ est convergente. En faisant un développement limité de u_n , montrer que $\sum u_n$ est divergente.

Exercice 5 : 1. Démontrer que la série de terme général $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$, $n > 0$ converge.

2. Démontrer que la série de terme général $v_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n \ln(n)}$, $n > 0$ diverge.

Exercice 6 : Etudier la convergence absolue et la convergence des séries de terme général suivant :

$$\begin{array}{lll}
 1. (-1)^n \left(\tan \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n}}\right), & 2. \left(1 - \frac{n}{\ln n}\right)^{-n}, & 3. \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \\
 4. \frac{(-1)^n}{n \sqrt[n]{n}}, & 5. \cos n \cdot \sin \frac{1}{n^2}, & 6. \frac{(-1)^n}{n^{(1+n^a)}}, \quad a \in \mathbb{R}.
 \end{array}$$

Exercice 7 : Déterminer si les séries suivantes convergent :

$$\begin{array}{lll}
 1. \sum_{k \geq 2} \frac{(-1)^k}{\ln k}, & 2. \sum_{k \geq 1} (-1)^k \frac{k+1}{k}, & 3. \sum_{k \geq 1} (-1)^k \frac{\sin k}{k^2} \\
 4. \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, & 5. \sum_{k \geq 2} \frac{(-1)^k}{k^\alpha + (-1)^k}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.
 \end{array}$$

Annales sur les séries numériques.

Exercice 1 : (Annales 2009 et 2010)

Répondre par vrai ou faux, et surtout **justifier avec précision** votre réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Attention, toute réponse sans justification ne sera pas prise en compte.

1. Pour $n \geq 1$, on pose

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

La série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

2. Soit $\sum_{n \geq 0} a_n$ une série à termes strictement positifs. Si cette série converge, alors

la suite $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_n$ converge vers un réel $\ell < 1$.

Exercice 2 : (Annales 2003)

Un développement asymptotique de $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Un équivalent de H_n

Soit n un entier naturel non nul, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

(a) Si k est un entier non nul, montrer que : $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$.

(b) En déduire l'encadrement suivant : $\ln n + \frac{1}{n} \leq H_n \leq \ln n + 1$.

(c) Donner un équivalent de H_n en $+\infty$.

2. Suites adjacentes (déjà traité en cours)

Soit deux suites de réels (v_n) et (w_n) adjacentes c'est-à-dire que :

(v_n) est croissante, (w_n) est décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - w_n) = 0$.

(a) Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, $v_n \leq w_n + 1$. En déduire que la suite (v_n) est majorée.

(b) Montrer que la suite (w_n) est minorée.

(c) En déduire que les suites (v_n) et (w_n) sont convergentes et convergent vers une même limite réelle.

3. Constante d'Euler

On pose, pour $n \geq 1$, $c_n = H_n - \ln n$ et $d_n = c_n - \frac{1}{n}$.

(a) Montrer que, pour $n \geq 1$, $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$.

(b) Montrer que les suites (c_n) et (d_n) convergent vers une même limite.

On note alors γ cette limite (γ est appelée constante d'Euler).

(c) Montrer que : $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.

Exercice 3 : (Annales 2004)

Etude de séries dont le terme général est le reste d'une série convergente.

Soit n_0 un entier naturel fixé. Soit $\sum_{n \geq n_0} a_n$ une série convergente. On définit pour n entier naturel supérieur ou égal à n_0 , r_n son reste de rang n : $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$. Le but de l'exercice est d'étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq n_0} r_n$ dans trois exemples différents.

1. On pose pour $n \geq 0$, $a_n = \frac{1}{2^n}$.

Calculer r_n puis montrer que $\sum_{n \geq 0} r_n$ converge et calculer sa somme.

2. On pose pour $n \geq 1$, $a_n = \frac{1}{n^2}$.

Nous allons chercher un équivalent de (r_n) .

Soit k un entier supérieur ou égal à 1.

- (a) Montrer que $\forall t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{k^2}$.

- (b) En déduire que pour tout entier naturel non nul n et pour tout entier N

supérieur à 2 et à $n+1$, on a : $\sum_{k=n+1}^N \frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^2} \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^2}$.

- (c) En déduire que pour tout entier naturel non nul n , on a :

$$\frac{1}{n+1} \leq r_n \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}.$$

- (d) Donner alors un équivalent de (r_n) lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

Que peut-on conclure sur la nature de la série $\sum_{n \geq 1} r_n$?

3. On pose pour $n \geq 1$, $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

- (a) Justifier la convergence de $\sum_{n \geq 1} a_n$.

- (b) Expression intégrale de r_n .

Soit n un entier naturel non nul. On définit la suite (I_n) par

$$I_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx.$$

- (i) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

- (ii) Montrer que $I_n = \ln 2 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$. On pourra calculer $\sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k$.

- (iii) En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, puis exprimer r_n en fonction de I_n .

(c) Conclusion

(i) En utilisant une intégration par parties, montrer que l'on a :

$$I_n = \frac{(-1)^n}{a(n+1)} + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

où $a \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 1$ sont à déterminer.

(ii) En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 1} r_n$.

Exercice 4 : (Annales 2003)

Règle de Raabe-Duhamel.

1. Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs telle qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ vérifiant : $\forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$, montrer que : si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.

2. Soit β un réel non nul et (u_n) une suite de réels strictement positifs satisfaisant à : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

(a) Montrer que, si l'on pose, pour $n \geq 1$ et α réel $\alpha > 0$, $v_n = \frac{1}{n^\alpha}$, on a :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\beta - \alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

(b) Si $\beta > 1$, montrer que la série $\sum u_n$ converge. (On pourra choisir le réel $\alpha \in]1, \beta[$).

(c) Si $\beta < 1$, montrer que la série $\sum u_n$ diverge.

3. Déterminer, en utilisant la règle de Raabe-Duhamel (résultats 2b et 2c ci-dessus), la nature des séries de terme général u_n :

(a) $u_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$.

(b) $u_n = \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)}$ où a et b sont deux réels qui ne sont pas des entiers négatifs. (On discutera selon la valeur de $b - a$)

Exercice 5 : (Annales 2008)

Etude d'une série produit

Si $S_a = \sum_{n \geq 1} a_n$ et $S_b = \sum_{n \geq 1} b_n$ sont deux séries convergentes, on appelle série produit

de S_a par S_b la série $\sum_{n \geq 2} c_n$ où $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$. Le but de cet exercice est d'établir

la nature de la série produit de $S_\alpha = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ par elle-même.

1. Equivalent de la série harmonique

Pour $n \geq 1$, on pose $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$, cela définit la série harmonique.

(a) Montrer qu'une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge si et seulement si la série $\sum_{n \geq 1} (u_{n+1} - u_n)$ converge.

- (b) Justifier que pour n au voisinage de $+\infty$, on a $\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
- (c) Désormais on pose $u_n = H_n - \ln n$. Montrer que $u_{n+1} - u_n$ est équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ à une expression de la forme $\frac{p}{n^q}$ où p et q sont deux réels à déterminer.
- (d) En déduire la nature de la suite (u_n) et enfin un équivalent simple de H_n lorsque n tends vers $+\infty$.
2. Un série produit.
Pour quelles valeurs de α , la série S_α converge-t-elle ? Jusqu'à la fin de l'exercice, on choisit α de la sorte. On considère $\sum_{n \geq 2} c_n$ la série produit de S_α par S_α .
3. Jusqu'à la fin de l'exercice on considère $n \geq 2$ un entier.
- (a) Déterminer le maximum de la fonction $x \mapsto x(n-x)$ définie sur \mathbb{R} .
- (b) En déduire que $|c_n| \geq \frac{4^\alpha(n-1)}{n^{2\alpha}}$.
- (c) Conclure que pour $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, la série $\sum_{n \geq 2} c_n$ diverge.
4. Désormais, on suppose que $\alpha = 1$.
- (a) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{X(n-X)}$.
- (b) En déduire une expression de c_n en fonction de $\frac{H_{n-1}}{n}$.
- (c) Déterminer la monotonie de la suite $\left(\frac{H_{n-1}}{n}\right)_{n \geq 2}$.
- (d) En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 2} c_n$.

Exercice 6 : (Annales 2011)

Calcul de la somme d'une série

1. Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$.
2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1 et x un réel positif ou nul. Démontrer que :

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt.$$

On pourra partir de $\sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k$ puis intégrer.

3. Démontrer à l'aide d'un encadrement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt = 0$.
4. En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Évaluation

I. Programme

Réels

Définition de sup et inf.

Suites

Savoir définir et manipuler $u_n = o(v_n)$, $u_n = O(v_n)$ et $u_n \sim v_n$.

Savoir démontrer que si (u_n) est bornée et (v_n) converge vers 0, alors $(u_n v_n)$ converge vers 0.

Savoir démontrer que si deux suites sont adjacentes, alors elles convergent et ont même limite.

Savoir énoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass : de toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

Savoir calculer la limite d'une suite, par exemple à l'aide d'équivalents quand il y a une forme indéterminée.

Séries

Définition d'une série, d'une série convergente, et de sa somme.

Savoir ce qu'est une série absolument convergente.

Savoir que si une série est absolument convergente, alors elle est convergente.

Savoir que pour les **séries à termes positifs**, deux séries de termes équivalents sont de même nature. Ne pas oublier de préciser que les séries sont à termes positifs pour utiliser ce résultat.

Séries de Riemann.

Règle de d'Alembert : si $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$ converge vers une limite $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente (donc convergente).

Savoir ce qu'est une série alternée. Ne pas oublier de vérifier d'hypothèse, en particulier, $|u_n|$ doit être décroissant. Il faut vérifier 3 points : $(-1)^n u_n$ ne change pas de signe, $u_n \rightarrow 0$ et $|u_n|$ est décroissante.

Savoir qu'une série alternée est convergente.

Connaître un exemple de suite telle que $(-1)^n u_n \geq 0$ et $u_n \rightarrow 0$, mais telle que la série $\sum u_n$ soit divergente. Par exemple, $\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} + \frac{1}{k}$.

Nom :

Prénom :

Les étudiant(e)s répondant correctement à cette question dans les 2 prochaines minutes auront 1/2 point en plus pour l'examen du 26 septembre.

Question de cours

Pour quels réels α la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est-elle convergente ?

Nom :

Prénom :

Les étudiant(e)s répondant correctement à cette question dans les 2 prochaines minutes auront 1/2 point en plus pour l'examen du 26 septembre.

Question de cours

Pour quels réels α la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est-elle convergente ?

Test de 15mn. Mathématiques. Lundi 19 septembre

Merci de répondre directement sur la feuille en justifiant votre réponse.

1. Déterminer un réel a tel que

$$\frac{n^2 + n + 1}{n + 2} - (n + a) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

2. En déduire un équivalent simple de $e^{(n^2+n+1)/(n+2)}$ quand $n \rightarrow +\infty$.

EPCM. Contrôle continu n°1.
Sujet type. Durée 1h30.

N.B. Les calculatrices, les documents et les téléphones portables sont interdits. Il est demandé de soigner la présentation.

Barème indicatif: Exercice 1 : 4 pts ; Exercice 2 : 11 pts ; Exercice 3 : 5 pts.

Exercice 1 :

1. La suite de terme général $u_n = \ln \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n - 1}$ est-elle convergente ? Si oui, déterminer la limite.
2. Justifier que pour n au voisinage de $+\infty$, on a $\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 2 : Un développement asymptotique de $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. **Un équivalent de H_n**

Soit n un entier naturel non nul, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

- (a) Si k est un entier non nul, montrer que : $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$.
- (b) En déduire l'encadrement suivant : $\ln n + \frac{1}{n} \leq H_n \leq \ln n + 1$.
- (c) Donner un équivalent de H_n en $+\infty$.

2. **Suites adjacentes (déjà traité en cours)**

Soit deux suites de réels (v_n) et (w_n) adjacentes c'est-à-dire que :
 (v_n) est croissante, (w_n) est décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - w_n) = 0$.

- (a) Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, $v_n \leq w_n + 1$. En déduire que la suite (v_n) est majorée.
- (b) Montrer que la suite (w_n) est minorée.
- (c) En déduire que les suites (v_n) et (w_n) sont convergentes et convergent vers une même limite réelle.

3. **Constante d'Euler**

On pose, pour $n \geq 1$, $c_n = H_n - \ln n$ et $d_n = c_n - \frac{1}{n}$.

- (a) Montrer que, pour $n \geq 1$, $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$.
- (b) Montrer que les suites (c_n) et (d_n) convergent vers une même limite.
On note alors γ cette limite (γ est appelée constante d'Euler).
- (c) Montrer que : $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.

Exercice 3 : Un vrai-faux.

Pour toutes les propositions, répondre par vrai ou faux, et surtout **justifier avec précision** votre réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Attention, toute réponse sans justification ne sera pas prise en compte.

1. Pour $n \geq 1$, on pose

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

La série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

2. Soient $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ deux suites équivalentes quand $n \rightarrow +\infty$. Alors, les séries $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$ sont de même nature.

EPCM. Contrôle continu n°1.
Lundi 26 septembre 2011. Durée 1h30.

N.B. Les calculatrices, les documents et les téléphones portables sont interdits. Il est demandé de soigner la présentation.

Barème indicatif: Exercice 1 : 4 pts ; Exercice 2 : 11 pts ; Exercice 3 : 5 pts.

Exercice 1 :

1. La suite de terme général $u_n = \left(1 - \frac{3}{n}\right)^{2n}$ est-elle convergente ? Si oui, déterminer la limite.
2. La suite de terme général $v_n = (-1)^n \frac{n^2 + 1}{2n + 1} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ est-elle convergente ? Si oui, déterminer la limite.

Exercice 2 : Etude de séries dont le terme général est le reste d'une série convergente.

Soit n_0 un entier naturel fixé. Soit $\sum_{n \geq n_0} a_n$ une série convergente. On définit pour n entier naturel supérieur ou égal à n_0 , r_n son reste de rang n : $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$. Le but de l'exercice est d'étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq n_0} r_n$ dans trois exemples différents.

1. On pose pour $n \geq 0$, $a_n = \frac{1}{2^n}$.

Calculer r_n puis montrer que $\sum_{n \geq 0} r_n$ converge et calculer sa somme.

2. On pose pour $n \geq 1$, $a_n = \frac{1}{n^2}$.

Nous allons chercher un équivalent de (r_n) .

Soit k un entier supérieur ou égal à 1.

- (a) Montrer que $\forall t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{k^2}$.

- (b) En déduire que pour tout entier naturel non nul n et pour tout entier N supérieur à 2 et à $n+1$, on a : $\sum_{k=n+1}^N \frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^2} \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^2}$.

- (c) En déduire que pour tout entier naturel non nul n , on a :

$$\frac{1}{n+1} \leq r_n \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}.$$

- (d) Donner alors un équivalent de (r_n) lorsque n est au voisinage de $+\infty$.
Que peut-on conclure sur la nature de la série $\sum_{n \geq 1} r_n$?

Exercice 3 : Un vrai-faux.

Pour toutes les propositions, répondre par vrai ou faux, et surtout **justifier avec précision** votre réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Attention, toute réponse sans justification ne sera pas prise en compte.

1. Pour $n \geq 1$, on pose

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}.$$

La série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

2. Soit $\sum_{n \geq 0} a_n$ une série à termes strictement positifs. Si cette série converge, alors la suite $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right)_{n \geq 0}$ converge vers un réel $\ell < 1$.

CHAPITRE 2
INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

Programme officiel

I. Intégration

Définition de l'intégrale d'une fonction en escalier sur un segment. Approximation des fonctions continues par des fonctions escalier : on admet que si f est continue sur $[a, b]$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe des fonctions φ et ψ , en escalier sur $[a, b]$, telles que : $\varphi \leq f \leq \psi$ et telles que $\forall x \in [a, b] : \psi(x) - \varphi(x) \leq \varepsilon$. Définition de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment. Linéarité, monotonie et relation de Chasles, intégrale des fonctions continues par morceaux. Relation: $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$ et première formule de la moyenne pour les fonctions continues. Le théorème suivant : "Une fonction continue et positive, définie sur un segment $[a, b]$, est nulle si et seulement si son intégrale est nulle" doit être connu. Primitives d'une fonction continue. Intégration par parties des fonctions de classe C^1 . Changement de variable. Formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral. Primitives des fractions rationnelles n'ayant que des pôles simples ou doubles. Primitives des fractions rationnelles en sin et cos.

II. Intégrales généralisées absolument convergentes

Définition de l'intégrale, sur un intervalle quelconque, d'une fonction continue positive ; théorème de comparaison, équivalents. Définition d'une fonction continue absolument intégrable à valeurs réelles et définition de son intégrale généralisée. Changement de variable dans les intégrales généralisées de fonctions absolument intégrables.

Intégrales généralisées

III. Définitions, Exemples

Définition 1. $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

– $\int_a^b f(t) dt$ est une intégrale classique si, et seulement si, $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

– dans tous les autres cas, $\int_a^b f(t) dt$ est dite généralisée.

Par exemple. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$, $\int_a^{+\infty} f(t) dt$, $\int_{-\infty}^b f(t) dt$.

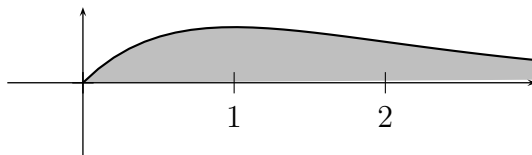
Ou bien, $a, b \in \mathbb{R}$ et f non continue sur $[a, b]$: $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$, $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$.

Exemples.

Fonction Gamma d'Euler :

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

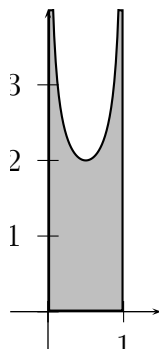
Pour $x = 2$, $\Gamma(2) = \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt$. L'aire sous la courbe est-elle finie ?



Fonction Beta d'Euler :

$$\beta(r, s) := \int_0^1 x^{r-1} (1-x)^{s-1} dx.$$

Pour $r = s = 1/2$, $\beta(1/2, 1/2) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$. L'aire sous la courbe est-elle finie ?



Définition 2.

- Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue ($a \in \mathbb{R}$). L'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge si, et seulement si, $\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_a^X f(t) dt$ existe. Dans ce cas, on pose :

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt := \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_a^X f(t) dt.$$

- Soit $f :]-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue ($b \in \mathbb{R}$). L'intégrale $\int_{-\infty}^b f(t) dt$ converge si, et seulement si, $\lim_{X \rightarrow -\infty} \int_X^b f(t) dt$ existe. Dans ce cas, on pose :

$$\int_{-\infty}^b f(t) dt := \lim_{X \rightarrow -\infty} \int_X^b f(t) dt.$$

- Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge si, et seulement si, $\int_{-\infty}^0 f(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ convergent. On pose :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt := \lim_{\substack{X \rightarrow +\infty \\ Y \rightarrow -\infty}} \int_Y^X f(t) dt.$$

- idem pour $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue.

- si $f : [a, b] \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, $\int_a^b f(t) dt$ converge si, et seulement si, $\int_a^c f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$ convergent. On pose :

$$\int_a^b f(t) dt := \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

Retour aux exemples.

$$\int_0^X te^{-t} dt \stackrel{\text{IPP}}{=} [-te^{-t}]_0^X + \int_0^X e^{-t} dt = 1 - (X+1)e^{-X} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1.$$

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon'} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} & \stackrel{x=\sin^2 \theta}{dx=2 \sin \theta \cos \theta d\theta} = \int_{\text{Arcsin} \sqrt{\varepsilon}}^{\text{Arcsin} \sqrt{1-\varepsilon'}} \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} d\theta \\ & = 2(\text{Arcsin} \sqrt{1-\varepsilon'} - \text{Arcsin} \sqrt{\varepsilon}) \rightarrow 2(\pi/2 - 0) = \pi. \end{aligned}$$

IV. Limite à l'infini

Proposition 1. Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$.

- Si $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge alors $\ell = 0$.

– Si $\ell \neq 0$ alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ diverge.

Proposition 2. Si $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ n'implique pas que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge.

Proposition 3. Si $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, alors $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge n'implique pas que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

V. Convergence absolue

Proposition 4. Si $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue et $\int_a^b |f(t)| dt$ converge, alors $\int_a^b f(t) dt$ converge.

Définition 3. Si $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue et $\int_a^b |f(t)| dt$ converge, on dit que $\int_a^b f(t) dt$ est absolument convergente. Si $\int_a^b f(t) dt$ converge mais que $\int_a^b |f(t)| dt$ diverge, on dit que $\int_a^b f(t) dt$ est semi-convergente.

Exemple: $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est semi-convergente. Pour le montrer, on utilise une intégration par parties.

VI. Changement de variable

Proposition 5. Si $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est continue et $g :]\alpha, \beta[\rightarrow]a, b[$ est C^1 , croissante et bijective, alors $\int_\alpha^\beta f(g(x)) \cdot g'(x) dx$ converge si, et seulement si, $\int_a^b f(t) dt$ converge. Alors :

$$\int_\alpha^\beta f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_a^b f(t) dt.$$

VII. Comparaison série-intégrale

Proposition 6. Si $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et décroissante, alors l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ et la série $\sum_{k \geq a} f(k)$ sont de même nature.

VIII. Nature des intégrales généralisées

Proposition 7. Si $f, g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ sont continues positives, si $f \leq g$ et si $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge.

Si $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ diverge, alors $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ diverge.

Proposition 8. Si $f, g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ sont continues positives et si $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x)$, alors les intégrales $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ sont de même nature.

Proposition 9 (Riemann). $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Proposition 10. Si $f, g :]0, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ sont continues positives. Alors

- si $f \leq g$ et si $\int_0^b g(t) dt$ converge, alors $\int_0^b f(t) dt$ converge.
- si $f \leq g$ et si $\int_0^b f(t) dt$ diverge, alors $\int_0^b g(t) dt$ diverge.
- si $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} g(x)$, alors les intégrales $\int_0^b f(t) dt$ et $\int_0^b g(t) dt$ sont de même nature.
- Riemann : $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha < 1$.

Exercices. Feuille 3.

Exercice 1. Calculer lorsqu'elles convergent les intégrales généralisées suivantes:

1. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx$
2. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$
3. $\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos x dx$
4. $\int_0^{+\infty} \ln(1+x) dx$

Exercice 2. Etudier la convergence des intégrales généralisées suivantes:

1. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{4t^2+t+1}} dt$
2. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\alpha^2+t^2} dt$
3. $\int_0^1 \frac{e^t}{t} dt$
4. $\int_0^1 \ln t dt$
5. $\int_0^{+\infty} \frac{(1+\sqrt{t})^2}{1+t^2} dt$
6. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t} dt$
7. $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t^2} dt$
8. $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$

Exercice 3. Déterminer pour quelles valeurs de couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ les intégrales suivantes sont convergentes. (on dessinera dans le plan l'ensemble des couples (α, β) pour lesquels il y a convergence).

1. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(1+x^\beta)} dx$
2. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta} dt$
3. $\int_0^{+\infty} \frac{(1+t)^\alpha - t^\alpha}{t^\beta} dt$
4. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta} : \text{intégrales de Bertrand, } e > 0. \text{ En déduire } \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$

Exercice 4. Soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt$.

1. Montrer que I est convergente.
2. Pour $\varepsilon > 0$, établir, en posant $x = 2t$ la relation

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt = \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

3. En déduire I .

Exercice 5.

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est convergente.
2. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx$$

Montrer que pour tout $n \geq 0$, on a $\frac{2}{(n+1)\pi} \leq u_n$. En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ diverge.

Annales sur les intégrales généralisées.

Exercice 1 : (Annales 2007, 2009)

Pour toutes les propositions, répondre par vrai ou faux, et surtout **justifier avec précision** votre réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Attention, toute réponse sans justification ne sera pas prise en compte.

Toutes les fonctions considérées sont de variable réelle et à valeurs dans \mathbb{R} .

1. Si f est une fonction continue sur un intervalle I , alors l'intégrale $\int_I f$ est convergente.
2. Si f et g sont deux fonctions continues sur l'intervalle $]0, 1[$ telles que les intégrales $\int_0^1 f$ et $\int_0^1 g$ convergent, alors $\int_0^1 fg$ converge.
3. Soit f une fonction positive et telle que $\int_0^1 f(t) dt$ converge sur $[0, 1]$. Si $\int_0^1 f(t) dt = 0$, alors f est nulle sur $[0, 1]$.

Exercice 2 : (Annales 2006)

1. Question préliminaire

Pour quelle(s) valeur(s) de β l'intégrale $\int_0^1 t^\beta dt$ est-elle convergente ? On ne demande pas de justifier.

La fonction Gamma d'Euler

1. Soit x un réel strictement positif, justifier l'existence d'un réel A strictement positif, tel que pour tout réel t strictement supérieur à A , on ait $e^{-t}t^{x-1} < \frac{1}{t^2}$, puis montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t} dt$ est convergente.
On peut donc définir sur $]0, +\infty[$, la fonction Gamma d'Euler notée Γ par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t} dt$.
2. Calculer $\Gamma(1)$ puis montrer la relation fondamentale suivante :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

En déduire $\Gamma(2)$. Soit n un entier naturel non nul, donner une expression simple de $\Gamma(n)$.

Exercice 3 : (Annales 2005)

Calcul de l'intégrale de Dirichlet $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

1. **Existence de I**

On définit sur $[0, +\infty[$ la fonction f par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ pour $x > 0$ et $f(0) = 1$.

Justifier que f est continue sur $[0, +\infty[$ puis montrer que $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente. On pourra intégrer par parties l'intégrale $\int_1^A \frac{\sin t}{t} dt$ ($A > 1$).

2. Pour tout entier naturel non nul n , on définit I_n et J_n par : $I_n = \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t} dt$

et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt$.

(a) Montrer que $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{t} dt$.

(b) Soient $x \in]0; \frac{\pi}{2}]$ et k un entier naturel non nul.

Ecrire $\sin x \cos(2kx)$ à l'aide d'une différence de deux "sinus" et en déduire une relation entre $\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}$ et $\sum_{k=1}^n \cos(2kx)$.

(c) Calculer J_n .

3. **Lemme de Lebesgue**

Soit g une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle $[a, b]$ où a et b sont des réels avec $a < b$. On pose, pour tout entier naturel n , $L_n = \int_a^b g(t) \sin(nt) dt$.

Montrer en utilisant une intégration par parties que la suite (L_n) tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

4. On définit la fonction φ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par $\varphi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$ pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$ et $\varphi(0) = 0$.

(a) Donner le développement limité à l'ordre 1 en 0 de φ .

(b) Montrer que φ est dérivable sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.

On **admet** pour la fin de l'exercice que φ est en fait de classe \mathcal{C}^1 sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ (cela se démontre avec des calculs de développements limités).

5. **Conclusion**

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (I_n - J_n) = 0$ et en déduire la valeur de l'intégrale I .

Exercice 4 : (Annales 2008)

Etude d'une fonction définie par une intégrale

1. Questions préliminaires

(a) Donner la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. En déduire la limite lorsque n

tend vers $+\infty$ de $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k+1}}$.

- (b) Donner l'allure de la courbe de la fonction $t \mapsto |\sin t|$ sur $[0, 2\pi]$ puis calculer pour tout entier $k \geq 1$, $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| dt$.
2. Donner un équivalent simple en 0^+ de la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$. En déduire que la fonction $F : x \mapsto \int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ est bien définie et est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$.
3. (a) Donner la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\frac{3}{2}}} dt$.
- (b) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $\int_1^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.
4. Montrer avec soin qu'une fonction continue sur $[0, +\infty[$ et qui admet une limite finie en $+\infty$ est bornée. En déduire que F est une fonction bornée.
5. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$,

$$\int_{\pi}^{n\pi} \frac{|\sin t|}{\sqrt{t}} dt \geq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ est-elle absolument convergente ?

CHAPITRE 3

SUITES ET SÉRIES DE
FONCTIONS

Programme officiel

L'étude générale des suites et des séries de fonctions n'est pas au programme de la partie I.

I. Séries entières de la variable réelle (partie I)

Définition d'une série entière $\sum a_n x^n$ de la variable réelle x associée à la suite de nombres réels a_n . Définition du rayon de convergence R . Règles de d'Alembert et de Cauchy. La somme est de classe C^∞ sur $] -R, R[$ quand $R > 0$: intégration et dérivation termes à termes. Définition d'une fonction développable en série entière au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$. Développements en série entière des fonctions usuelles au voisinage d'un point x_0 . Applications: utilisation du développement en série entière pour l'approximation de fonctions ; emploi des séries entières dans la recherche de solutions d'équations différentielles linéaires à coefficients non constants.

II. Suites et séries de fonctions définies sur un intervalle à valeurs dans K (partie II)

Toutes les applications dont il est question ici sont définies sur un intervalle I de \mathbb{R} et à valeurs dans l'espace vectoriel K avec $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$.

Définition de la convergence uniforme d'une suite de fonctions définies sur I à valeurs dans K . Critère de Cauchy de convergence uniforme. La limite uniforme d'une suite de fonctions bornées sur I est bornée sur I et celle d'une suite de fonctions continues sur I est continue sur I .

Théorème d'intégration : si (f_n) est une suite de fonctions de classe $C^0([a, b], K)$ qui converge uniformément sur $[a, b]$, alors :

$$\lim \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \lim f_n(t) dt.$$

Théorème de dérivation : si (f_n) est une suite de fonctions de classe $C^1([a, b], K)$ qui converge simplement en un point $x \in [a, b]$ et qui est telle que la suite (f'_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction g , alors (f_n) admet une limite uniforme f sur $[a, b]$, f est de classe $C^1([a, b], K)$ et $f' = g$. Extension aux suites de fonctions de classe C^p ($p \geq 1$).

Définition de la convergence uniforme d'une série de fonctions, $\sum f_n$, définies sur I . Critère de Cauchy de convergence uniforme. Définition de la convergence normale d'une série de fonctions bornées sur I . Toute série normalement convergente sur I , est uniformément convergente sur I . Utilisation d'une série majorante pour établir la convergence normale. Théorèmes de dérivation et d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions de $C^1([a, b], K)$ et $C^0([a, b], K)$ respectivement.

Suites de fonctions

On s'intéresse aux fonctions définies par des limites : $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$.

Par exemple :

$$e^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Les questions que l'on se pose :

- f est-elle bien définie ?
- quelles propriétés de f_n impliquent quelles propriétés de f ? En particulier :
 - si pour tout n , f_n est continue, est ce que f est continue ?
 - si pour tout n , f_n est C^1 , est ce que f est C^1 ?
 - si on sait calculer $\int_a^b f_n(x) dx$, a-t-on

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

III. Convergence simple

Définition 1. Une suite de fonctions ($f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$) converge simplement vers $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ sur X si :

$$\forall x \in X, \quad f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x).$$

Exemple : $f_n(x) = x^n$ pour $x \in [0, 1]$. Si $x = 1$, alors $f_n(x) = 1$ pour tout n et $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. Si $x \in [0, 1[$, $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Par conséquent, la suite (f_n) converge simplement vers f sur $[0, 1]$ avec :

$$\begin{cases} f(x) = 0 \text{ si } x \in [0, 1[\\ f(1) = 1 \end{cases}$$

Dans l'exemple précédent, les fonctions f_n sont continues mais la limite f ne l'est pas.

IV. Convergence uniforme

Définition 2. Une suite de fonctions ($f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$) converge uniformément vers $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ sur X si :

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Dans l'exemple précédent, la suite (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $[0, 1]$ (ni sur $[0, 1[$). En effet, pour tout n , $\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = 1$.

En revanche, la même suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[0, 1/2]$. En effet,

$$\sup_{x \in [0, 1/2]} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Proposition 1 (Critère de Cauchy pour la convergence uniforme)

Si $(f_n : X \rightarrow \mathbb{R})$ est une suite de fonctions telle que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, \forall p \geq 0, \forall x \in X, \quad |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$$

alors la suite $(f_n : X \rightarrow \mathbb{R})$ converge uniformément sur X vers une limite $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

V. Continuité

Proposition 2. Supposons que la suite $(f_n : X \rightarrow \mathbb{R})$ converge uniformément sur X vers $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in X$.

- Si les fonctions f_n sont continues en x_0 , alors f est continue en x_0 .
- Si les fonctions f_n sont continues sur X , alors f est continue sur X .

Preuve. Étant donné $\varepsilon > 0$, on a :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq 2 \sup_{y \in X} |f_n(y) - f(y)| + |f_n(x) - f_n(x_0)|. \end{aligned}$$

On voit donc qu'il existe n_0 tel que :

$$\forall x \in X, \quad |f(x) - f(x_0)| \leq |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + \varepsilon/2.$$

On utilise alors la continuité de f_{n_0} en x_0 ce qui montre l'existence de $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in X$ vérifiant $|x - x_0| \leq \eta$, on ait :

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| \leq \varepsilon/2.$$

Alors, pour tout $x \in X$ vérifiant $|x - x_0| \leq \eta$, on a :

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Cela montre la continuité de f en x_0 . □

VI. Intégrabilité

Proposition 3. Soit $(f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R})$ une suite de fonctions continues. Si (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers f , alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx.$$

Preuve. La fonction f est continue sur $[a, b]$, donc intégrable sur $[a, b]$. Pour tout $\varepsilon > 0$, si n est suffisamment grand, on a :

$$\forall x \in [a, b], \quad f(x) - \varepsilon \leq f_n(x) \leq f(x) + \varepsilon.$$

Donc :

$$\left(\int_a^b f(x) \, dx \right) - \varepsilon \cdot (b - a) \leq \int_a^b f_n(x) \, dx \leq \left(\int_a^b f(x) \, dx \right) + \varepsilon \cdot (b - a).$$

Autrement dit :

$$\left| \int_a^b f_n(x) \, dx - \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \varepsilon \cdot (b - a).$$

□

VII. Dérivabilité

Proposition 4. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Supposons que $(f_n : I \rightarrow \mathbb{R})$ est une suite de fonctions telles que :

- f_n est C^1 sur I ,
- $f_n(x_0) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ pour un certain $x_0 \in I$,
- la suite des dérivées (f'_n) converge uniformément sur I vers une fonction g .

Alors,

1. (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f ,
2. f est de classe C^1 sur I ,
3. $f(x_0) = \ell$, $f' = g$ et $f(x) = \ell + \int_{x_0}^x g(t) dt$.

Si de plus I est un intervalle borné, alors (f_n) converge uniformément vers f sur I .

Preuve. On applique le résultat d'intégrabilité sur $[x_0, x]$:

$$f_n(x) - f_n(x_0) = \int_{x_0}^x f'_n(t) dt \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_{x_0}^x g(t) dt.$$

Donc :

$$f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell + \int_{x_0}^x g(t) dt.$$

La limite

$$f(x) = \ell + \int_{x_0}^x g(t) dt$$

est donc une primitive de g . C'est donc une fonction C^1 de dérivée $f' = g$.

Si $I \subset [a, b]$ est un intervalle borné :

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| f_n(x_0) - \ell + \int_{x_0}^x (f'_n(t) - g(t)) dt \right| \\ &\leq |f_n(x_0) - \ell| + (b - a) \cdot \sup_{t \in I} |f'_n(t) - g(t)| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0. \end{aligned}$$

La convergence de (f_n) vers f est donc uniforme sur I . □

Séries de fonctions

On s'intéresse aux fonctions définies par des séries :

$$f(x) = \sum_k f_k(x).$$

Deux exemples :

1. les séries entières : $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ avec (a_k) une suite de nombres réels ou complexes. Par exemple : $\exp(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.
2. les séries de Fourier : $f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(kx)$.

I. Convergence simple, absolue, uniforme et normale

Dans tout ce qui suit, $(f_k : X \rightarrow \mathbb{R})$ est une suite de fonctions.

Définition 1 (Convergence simple).

La série de fonctions $\sum f_k$ converge simplement sur X si pour tout $x \in X$, la série numérique $\sum f_k(x)$ converge. On note alors : $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$ la somme de la série.

Exemple : le critère de d'Alembert montre que la série de fonctions $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ est convergente. On appelle \exp sa somme.

Définition 2 (Convergence absolue).

La série de fonctions $\sum f_k$ converge absolument sur X si pour tout $x \in X$, la série numérique $\sum |f_k(x)|$ est convergente.

Proposition 1. Si la série de fonctions $\sum f_k$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

Exemple : la série $\sum x^k/k!$ est absolument convergente.

Définition 3 (Convergence uniforme).

La série de fonctions $\sum f_k$ converge uniformément sur X vers f si la suite des sommes partielles $S_n : x \mapsto \sum_{k=0}^n f_k(x)$, converge uniformément sur X .

Proposition 2. Si la série de fonctions $\sum f_k$ est uniformément convergente, alors elle est convergente.

Proposition 3 (Critère de Cauchy).

La série de fonctions $\sum f_k$ converge uniformément sur X vers f si, et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, \forall p \geq 1, \forall x \in X, \quad |u_{n+1}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| \leq \varepsilon.$$

Définition 4 (Convergence normale).

La série $\sum f_k$ converge normalement sur X si la série $\sum \sup_{x \in X} |f_k(x)|$ est convergente.

Exemple : pour tout $M > 0$, la série $\sum x^k/k!$ est normalement convergente sur $[-M, M]$.

Proposition 4. Si la série de fonctions $\sum f_k$ est normalement convergente, alors elle est uniformément convergente et absolument convergente.

Preuve. Critère de Cauchy et inégalité triangulaire. □

On voit donc que pour tout $M > 0$, la série $\sum x^k/k!$ est uniformément convergente sur $[-M, M]$.

II. Continuité

La limite uniforme d'une série de fonctions continues est continue.

Proposition 5. Si les fonctions $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues et si la série $\sum f_k$ converge uniformément sur X , alors $\sum f_k$ est une fonction continue.

Preuve. Les sommes partielles S_n sont continues. La suite (S_n) converge uniformément sur X . Sa limite est donc continue (théorème de continuité pour les suites de fonctions). □

La fonction \exp est donc continue sur \mathbb{R} .

III. Intégration sur un segment

S'il y a convergence uniforme sur un segment, on peut permuter série et intégrale.

Proposition 6. Si les fonctions $f_k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues et si la série $\sum f_k$ converge uniformément sur $[a, b]$, alors :

$$\int_a^b \left(\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) \right) dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_k(x) dx \right).$$

Preuve. On applique le théorème d'échange de limite et intégrale pour la suite des sommes partielles S_n qui converge uniformément vers la somme de la série :

$$\begin{aligned}
 \int_a^b \sum_{k=0}^{+\infty} f_k & \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n f_k \\
 & \stackrel{\text{échange limite et intégrale}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \left(\sum_{k=0}^n f_k \right) \\
 & \stackrel{\text{linéarité de l'intégrale}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \int_a^b f_k \\
 & \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b f_k.
 \end{aligned}$$

□

Pour tout $b \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int_0^b \exp(x) \, dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^b \frac{x^k}{k!} \, dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b^{k+1}}{(k+1)!} = \exp(b) - 1.$$

La fonction \exp est donc sa propre primitive. On voit donc que \exp est une fonction dérivable et que $\exp' = \exp$.

IV. Dérivabilité

Si la série des dérivées converge uniformément, alors on peut dériver terme à terme.

Proposition 7. Si

- $f_k : I \rightarrow \mathbb{R}$ est C^1 sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$,
- $\sum f_k(x_0)$ converge pour un $x_0 \in I$ et
- $\sum f'_k$ converge uniformément sur I ,

alors la série $\sum f_k$ converge sur I , la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ est une fonction de classe C^1 sur I

et :

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} f_k \right)' = \sum_{k=0}^{+\infty} f'_k.$$

De plus, si I est borné, la série $\sum f_k$ converge uniformément sur I .

Preuve. Appliquer le théorème de dérivabilité pour la limite d'une suite de fonctions à la suite des sommes partielles. □

V. Séries alternées

Proposition 8. Soit $(f_k : X \rightarrow [0, +\infty[)$ une suite de fonctions qui converge simplement (respectivement uniformément) sur X vers 0, avec pour tout $x \in X$, $f_{k+1}(x) \leq f_k(x)$. Alors, la série $\sum (-1)^k f_k$ converge simplement (respectivement uniformément) vers une fonction f sur X .

Preuve. On applique le théorème sur les séries alternées en observant que :

$$\forall x \in X, \quad \left| \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k f_k(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k f_k(x) \right| \leq f_{n+1}(x).$$

□

Feuille d'exercice sur les suites de fonctions

Exercice 1. Étudier la convergence des suites de fonctions suivantes sur le domaine I :

1. $a_n(x) = \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$, $I = [-1, 1]$
2. $b_n(x) = \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$, $I = \mathbb{R}$
3. $c_n(x) = \frac{1}{1 + n \cos(x)}$, $I = [0, \pi]$
4. $d_n(x) = xe^{-nx}$, $I = \mathbb{R}_+$
5. $f_n(x) = nx^n \ln(x)$, $I =]0, 1]$
6. $g_n(x) = n^2(1-x)^n \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, $I = [0, 2]$

Exercice 2. Soit $f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}$.

Étudier la convergence simple, puis uniforme sur \mathbb{R}_+ et enfin sur $[\alpha, +\infty[$, avec $\alpha > 0$.

Exercice 3. 1. Soit (f_n) une suite de fonctions continues convergeant uniformément vers une fonction f . Soit (x_n) une suite convergeant vers x . Montrer que la suite $(f_n(x_n))$ converge vers $f(x)$.

On définit maintenant la suite $(g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R})$ par

$$g_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ 2 - nx & \text{si } \frac{1}{n} \leq x < \frac{2}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{2}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

2. Étudier la convergence simple de la suite (g_n) .
3. Étudier la convergence de la suite $(g_n(1/n))$. Que peut-on en conclure sur la convergence uniforme de la suite (g_n) ?

Exercice 4 (Non inversion limite-intégrale).

Soit $f_n(x) = n \cos^n(x) \sin(x)$.

1. Déterminer la limite simple de la suite (f_n) .
2. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t=0}^{\pi/2} f_n(t) dt$.

Exercice 5 (Annales 2004).

II. Intégration sur un intervalle non borné de la limite d'une suite de fonctions

Si (f_n) est une suite convergente de fonctions définies sur l'intervalle non borné $[0, +\infty[$, on souhaite trouver une condition suffisante pour pouvoir permuter limite et intégrale,

c'est-à-dire avoir $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx$. Le but de ce paragraphe est donc de donner cette condition suffisante.

A. La convergence uniforme est insuffisante...

2. Pour tout entier naturel n non nul, on définit sur $[0, +\infty[$ la suite de fonctions (g_n) par :

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{x}{n^2} & \text{si } x \in [0, n[\\ -\frac{x}{n^2} + \frac{2}{n} & \text{si } x \in [n, 2n[\\ 0 & \text{si } x \in [2n, +\infty[. \end{cases}$$

(a) Représenter le graphe de g_2 .

(b) Soit $n \geq 1$, montrer que g_n est continue sur $[0, +\infty[$ et calculer $\int_0^{+\infty} g_n(x) dx$ en utilisant des conditions géométriques.

(c) Montrer que la suite (g_n) converge uniformément sur $[0, +\infty[$ vers la fonction nulle. A-t-on $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} g_n(x) dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx$?

B. Une condition suffisante : convergence uniforme sur tout segment et domination

Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions continues sur $[0, +\infty[$ qui converge uniformément sur tout segment $[0, a]$ inclus dans $[0, +\infty[$ avec $a > 0$ vers une fonction f . On suppose en plus que la suite (f_n) est dominée, c'est-à-dire qu'il existe une fonction g continue sur $[0, +\infty[$ telle que $\int_0^{+\infty} g(x) dx$ converge et telle que $\forall n \geq 1, |f_n| \leq g$.

3. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$ et que $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge.

4. Soit $\varepsilon > 0$.

(a) On définit sur $[0, +\infty[$ la fonction φ par $\varphi(t) = \int_t^{+\infty} g(x) dx$.

Déterminer la limite de φ en $+\infty$ puis justifier l'existence d'un réel $A > 0$ tel que $\int_A^{+\infty} g(x) dx < \frac{\varepsilon}{4}$.

(b) En déduire que pour tout $n \geq 1$,

$$\int_0^{+\infty} |f_n(x) - f(x)| dx \leq \int_0^A |f_n(x) - f(x)| dx + \frac{\varepsilon}{2}.$$

(c) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \int_0^{+\infty} f(x) dx$.

Nom :

Prénom :

Test de 15mn. Mathématiques. Lundi 14 novembre

Merci de répondre directement sur la feuille en justifiant votre réponse.

Pour $n \geq 1$, on pose $f_n(t) = 2nt(1 - t^2)^n$.

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 1]$ (on pourra distinguer le cas $t = 0$ et le cas $t > 0$).

2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $\int_0^1 f_n(t) dt = \frac{n}{n+1}$.

3. Que peut-on conclure quant à la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[0, 1]$?

Feuille d'exercice sur les séries de fonctions

Exercice 1 (Étude de domaine de convergence de séries de fonctions)

Étudier la convergence des séries de fonctions suivantes sur le domaine I :

1. $\sum a_n$ avec $a_n(x) = \frac{x}{x^2 + n^2}$, $I = \mathbb{R}$
2. $\sum b_n$ avec $b_n(x) = e^{-\sqrt{n}x}$, $I = [a, +\infty]$, $a > 0$
3. $\sum c_n$ avec $c_n(x) = \frac{1}{1 + n^2x^2}$, $I = [1, +\infty[$
4. $\sum d_n$ avec $d_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$, $I = \mathbb{R}_+$
5. $\sum f_n$ avec $f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2}$, $I = \mathbb{R}$

Exercice 2 (Un calcul de série numérique).

Soit $u_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ et $v_n(x) = (-1)^{n+1} x^{n-1}$.

1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge normalement sur tout intervalle $[-a, a]$, avec $0 < a < 1$. La limite, notée f , de cette série est-elle continue sur $] - 1, 1[$?
2. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge normalement sur tout intervalle $[-a, a]$, avec $0 < a < 1$.
3. En déduire que la fonction f est dérivable sur $] - 1, 1[$ et donner une expression simple de f' . En déduire une expression de f sur $] - 1, 1[$.
4. En majorant le reste $\sum_{n=N}^{\infty} u_n(x)$, montrer que la série converge uniformément sur $[0, 1]$. En déduire que f est continue sur $[0, 1]$.
5. Déduire de tout ce qui précède la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Exercice 3 (Un équivalent de ζ au voisinage de 1).

Soit $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.

1. Montrer que la série définissant la fonction ζ converge normalement sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 1$. En déduire que ζ est continue sur $]1, +\infty[$.
2. Montrer que la fonction ζ est C^1 sur $]1, +\infty[$.
3. Tracer le graphe de la fonction ζ sur $]1, +\infty[$.

Soit $a(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

4. Montrer que la série définissant la fonction a converge uniformément sur $[1, +\infty[$.
En déduire que a est continue sur $[1, +\infty[$.
5. Montrer que l'on a : $a(x) = \left(1 - \frac{1}{2^{x-1}}\right) \zeta(x)$.
6. En déduire un équivalent de ζ lorsque x tend vers 1^+ .

CHAPITRE 4
SÉRIES ENTIÈRES

Séries entières

I. Définition, exemples

Définition 1. Une série entière est une série de fonctions de la forme :

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n \quad \text{avec } a_n \in \mathbb{R} \quad \text{et } x \in \mathbb{R}.$$

Toute série entière converge au moins en 1 point : $x = 0$.

Les sommes partielles sont des polynômes.

Exemple 1. $\sum_{n \geq 0} x^n$. Si $x = 1$, la somme partielle d'ordre N vaut $N + 1$, et si $x \neq 1$:

$$\sum_{n=0}^N x^n = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x}.$$

Si $|x| < 1$, la série converge et la somme vaut $1/(1 - x)$. Si $|x| \geq 1$, la série diverge.

Exemple 2. $\exp(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$. La série converge sur \mathbb{R} .

II. Rayon de convergence

Proposition 1. Soit $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière. Il existe un rayon $R \in [0, +\infty]$ tel que

- pour $|x| < R$, la série converge,
- pour $|x| > R$, la série diverge.

Le réel R s'appelle le rayon de convergence de la série entière.

Attention, on ne dit rien pour $|x| = R$.

La démonstration de ces résultats s'appuie sur les résultats intermédiaires suivants.

Proposition 2. Si $\sum_{n \geq 0} a_n x_0^n$ converge pour un $x_0 \in \mathbb{R}$, alors pour tout x avec $|x| < |x_0|$,

la série $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ converge.

Preuve. La série $\sum_{n \geq 0} a_n x_0^n$ converge. Le terme général tend vers 0, ce qui montre que la suite $a_n x_0^n$ est bornée :

$$\exists M, \forall n \geq 0 \quad |a_n x_0^n| \leq M.$$

Si $|x| < |x_0|$, on a alors :

$$|a_n x^n| = \left| a_n x_0^n \frac{x^n}{x_0^n} \right| \leq M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n = M \lambda^n$$

avec $0 < \lambda = |x/x_0| < 1$. La série $\sum M \lambda^n$ est une série géométrique de raison < 1 . Elle est donc convergente. La série $\sum a_n x^n$ est donc absolument convergente. \square

Le rayon de convergence R est :

$$R := \sup \left\{ |x_0| \mid \sum_{n \geq 0} a_n x_0^n \text{ converge} \right\}.$$

Proposition 3. Si $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ a une limite ℓ , alors $R = 1/\ell$.

Proposition 4. Si $\sqrt[n]{|a_n|}$ a une limite ℓ , alors $R = 1/\ell$.

Attention. Il se peut que les limites précédentes n'existent pas. Cependant, le rayon de convergence est toujours bien défini.

III. Continuité de la somme d'une série entière

Proposition 5. Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R . Pour tout $0 < r < R$, la série $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ converge normalement sur le segment $[-r, r]$.

Corollaire. Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R . La somme de la série entière est continue sur $] -R, R[$.

IV. Primitive de la somme d'une série entière

Proposition 6. Les séries entières :

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

ont même rayon de convergence R . Soit $f :] -R, R[\rightarrow \mathbb{R}$ et $g :] -R, R[\rightarrow \mathbb{R}$ les fonctions définies par :

$$f(x) := \sum_{n \geq 0} a_n x^n \quad \text{et} \quad g(x) := \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Alors, g est dérivable sur $] -R, R[$ et $g' = f$.

V. Dérivées successives de la somme d'une série entière

Proposition 7. Les séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$ ont même rayon de convergence R . Soit $f :] -R, R[\rightarrow \mathbb{R}$ et $g :] -R, R[\rightarrow \mathbb{R}$ les fonctions définies par :

$$f(x) := \sum_{n \geq 0} a_n x^n \quad \text{et} \quad g(x) := \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}.$$

Alors, f est dérivable sur $] -R, R[$ et $f' = g$.

Corollaire. La somme d'une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence R est \mathcal{C}^∞ sur $] -R, R[$. Les dérivées successives s'obtiennent en dérivant terme à terme.

VI. Opérations sur les séries entières

On peut ajouter terme à terme deux séries entières.

Proposition 8. Soient $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R_1 et $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R_2 . La série entière $\sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) x^n$ a un rayon de convergence $R \geq \min(R_1, R_2)$ (avec égalité si $R_1 \neq R_2$). Pour tout $x \in]-R, R[$, on a :

$$\sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) x^n = \sum_{n \geq 0} a_n x^n + \sum_{n \geq 0} b_n x^n.$$

Le produit de deux séries entières est plus délicat.

Définition 2. Soient $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$ deux séries entières. La série “produit” est la série entière $\sum_{n \geq 0} c_n x^n$ avec :

$$c_n := \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0.$$

Proposition 9. Soient $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R_1 et $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R_2 . La série produit $\sum_{n \geq 0} c_n x^n$ a un rayon de convergence $R \geq R_3 := \min(R_1, R_2)$ et pour tout $x \in]-R_3, R_3[$, on a :

$$\left(\sum_{n \geq 0} a_n x^n \right) \cdot \left(\sum_{n \geq 0} b_n x^n \right) = \sum_{n \geq 0} c_n x^n.$$

Développement en séries entières

VII. Définition, premiers exemples

Définition 1. Une fonction $f :]x_0 - R, x_0 + R[$ est développable en série entière en x_0 sur $]x_0 - R, x_0 + R[$ si, et seulement si, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$ avec rayon de convergence R .

Proposition 1. Si f est DSE en x_0 avec rayon de convergence R alors f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]x_0 - R, x_0 + R[$ et

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

sur $]x_0 - R, x_0 + R[$.

Corollaire. Il y a unicité du développement en série entière.

Attention. La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et toutes ses dérivées en 0 sont nulles. Cependant f n'est pas développable en série entière puisque sinon, f serait nulle.

VIII. Premiers exemples

$\sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$. Le rayon de convergence est 1. Donc la fonction $f(x) = \frac{1}{1-x}$ est DSE en 0 avec rayon de convergence 1 et

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n \geq 0} x^n.$$

En remplaçant x par $-x$, on voit que $1/(1+x)$ est DSE en 0 avec rayon de convergence 1 et

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n.$$

En remplaçant x par x^2 , on voit que $1/(1+x^2)$ est DSE en 0 avec rayon de convergence 1 et

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^{2n}.$$

La fonction exponentielle est développable en série entière en 0 avec rayon de convergence $+\infty$ et

$$e^x = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}.$$

IX. Dérivation, intégration

Proposition 2. Si $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ sur $] -R, R[$ avec rayon de convergence R alors f' est DSE en 0 avec rayon de convergence R et

$$f'(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$$

sur $] -R, R[$.

Exemple. En dérivant $1/(1+x)$, on voit que $f(x) = 1/(1+x)^2$ est DSE en 0 avec rayon de convergence 1 et

$$\frac{1}{(1+x)^2} = - \left(\frac{1}{1+x} \right)' = \sum_{n \geq 1} (-1)^n n x^{n-1} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k (k+1) x^k.$$

Proposition 3. Si $f :] -R, R[\rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable et si sa dérivée est DSE en 0 avec rayon de convergence R , alors f est DSE en 0 avec rayon de convergence R et

$$f(x) = f(0) + \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Exemples. La fonction $f(x) = \ln(1+x)$ est une primitive de $1/(1+x)$. Elle est donc DSE en 0 avec rayon de convergence 1 et pour $x \in] -1, 1[$

$$\ln(1+x) = 0 + \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{k \geq 1} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}.$$

La fonction $f(x) = \text{Arctan}(x)$ est une primitive de $1/(1+x^2)$. Elle est donc DSE en 0 avec rayon de convergence 1 et pour $x \in] -1, 1[$

$$\text{Arctan}x = 0 + \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

X. Equations différentielles

Si f est solution d'une équation différentielle et si f est développable en série entière, alors l'équation différentielle permet généralement d'établir une relation de récurrence sur les coefficients de la série entière.

Par exemple, l'unique solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$ est la fonction $f(x) = \cos(x)$ (cf cours de l'an passé). Or, cette équation admet une solution développable en série entière en 0 avec rayon de convergence $+\infty$

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

En effet, le rayon de convergence est $+\infty$, la somme est donc \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} . On peut dériver deux fois terme à terme. On voit alors que la somme est solution de l'équation

différentielle. De plus $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$. Donc cette somme est égale à $\cos(x)$. On a donc pour $x \in \mathbb{R}$

$$\cos(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

De même, ou en dérivant terme à terme la série précédente

$$\sin(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Si l'on cherche une solution développable en série entière en 0 de l'équation différentielle $(1+x)y' - \alpha y = 0$, on obtient la relation suivante:

$$(1+x) \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1} - \alpha \sum_{n \geq 0} a_n x^n = 0$$

ce qui s'écrit également

$$\sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n \geq 1} (n-\alpha) a_n x^n = 0.$$

On a donc la relation de récurrence

$$(n+1)a_{n+1} + (n-\alpha)a_n = 0.$$

C'est-à-dire

$$a_{n+1} = \frac{\alpha - n}{n+1} a_n.$$

Si $\alpha \in \mathbb{N}$, les a_n sont tous nuls à partir d'un certain rang et le rayon de convergence est $+\infty$.

Si $\alpha \notin \mathbb{N}$ et si $a_0 \neq 0$, les coefficients a_n ne sont jamais nuls et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\alpha - n}{n+1} \right| = 1.$$

Le rayon de convergence est alors égal à 1. Il y a donc une solution développable en série entière en 0 avec rayon de convergence 1. La solution qui prend la valeur 1 en 0, c'est-à-dire pour $a_0 = 1$, est la fonction $(1+x)^\alpha$. Cela montre que $(1+x)^\alpha$ est DSE en 0 avec rayon de convergence 1.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n \geq 0} x^n \quad R = 1$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad R = 1$$

$$\operatorname{Arctan}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \quad R = 1$$

$$\operatorname{Argth}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \quad R = 1$$

Si $\alpha \notin \mathbb{N}$,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \overbrace{\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}}^{n \text{ termes}} x^n + \dots \quad R = 1$$

$$\operatorname{Arcsin}(x) = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \dots + \underbrace{\frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)}}_{n \text{ termes}} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \quad R = 1$$

$$\operatorname{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}(x) \quad R = 1$$

$$\operatorname{Argsh}(x) = x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \underbrace{\frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)}}_{n \text{ termes}} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \quad R = 1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad R = +\infty$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad R = +\infty$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad R = +\infty$$

$$\operatorname{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad R = +\infty$$

$$\operatorname{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad R = +\infty$$

Feuille d'exercices sur les séries entières

Exercice 1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ et étudier la convergence pour $|x| = R$ lorsque :

1. $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 1$,
2. $a_n = \frac{n}{2^n}$
3. $a_n = \frac{n!}{n^5+1}$,
4. $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$,
5. $(a_n)_{n \geq 0}$ définie par $a_0 > 0$ et $a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$,
6. $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite telle que $a_n \rightarrow \ell \neq 0$.

Exercice 2. Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$. Quel est le rayon de convergence de la série $\sum a_n^2 x^n$?

Exercice 3. Développer en série entière les fonctions suivantes (préciser le rayon de convergence de la série entière obtenue).

1. $f(x) = \frac{1}{1-x+x^2}$.
2. $g(x) = e^{1+x^2}$.
3. $h(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.

Exercice 4. Développer en série entière au voisinage de x_0 les fonctions suivantes (en précisant l'intervalle de validité du développement obtenu)

1. $f(x) = \sqrt{x}$ ($x_0 = 2$),
2. $g(x) = e^x$ ($x_0 = -1$).

Exercice 5. On considère la fraction rationnelle

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2(1+2x)}.$$

1. Décomposer f en éléments simples.
2. En déduire le développement en série entière de la fonction f au voisinage de 0.
3. Quel est le rayon de convergence de cette série entière ?

Annales sur les suites et séries de fonctions

Exercice 1 (Annales 2006).

Problème : utilisation des séries de Grégory pour l'approximation de π .

Le problème propose l'étude d'une approximation de π .

I. Séries de Grégory

Pour tout réel a de $]0, 1]$, on définit la série de Grégory de paramètre a par :

$$G_a = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{a^n}{2n+1}.$$

1. Convergence de la série G_a
 - (a) Montrer que la série G_1 est convergente. Est-elle absolument convergente ? Justifier votre réponse.
 - (b) En utilisant le critère de d'Alembert, montrer que pour $a \in]0, 1[$, la série G_a est absolument convergente.

On notera, dans la suite, $G(a)$ la somme de la série G_a , c'est-à-dire

$$G(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{a^n}{2n+1}.$$

2. Soit $a \in]0, 1]$.
 - (a) Étudier les variations de la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{a^n}{2n+1}$.
 - (b) Pour tout entier naturel n , on note $G_{n,a}$ la somme partielle de la série G_a , c'est-à-dire

$$G_{n,a} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{a^k}{2k+1}.$$

Justifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |G(a) - G_{n,a}| \leq \frac{a^{n+1}}{2n+3}.$$

II. Expression de la fonction arctangente à l'aide de séries de Grégory

3. Donner le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ puis déterminer le rayon de convergence de cette série entière.
4. Justifier que pour $x \in]-1, 1[$,

$$\text{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

En déduire une expression de $\text{Arctan}(a)$ à l'aide d'une série de Grégory lorsque $a \in]0, 1[$.

III. Formule de John Machin

Pour toute cette partie, on pourra utiliser la formule suivante de trigonométrie :

$$\tan(u + v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}.$$

5. Calculer

- $\tan\left(2\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right)$, puis
- $\tan\left(4\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right)$, puis
- $\tan\left(4\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \frac{\pi}{4}\right)$.

On donnera les résultats sous forme de rationnels.

6. En déduire la formule de Machin

$$\frac{\pi}{4} = 4\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right).$$

IV. Application de la formule de Machin pour approximer π

7. Expression de π comme combinaison linéaire de 2 séries de Grégory

À l'aide de la formule de John Machin, déterminer 4 réels strictement positifs $\lambda_1, \lambda_2, a_1, a_2$ tels que $\pi = \lambda_1 G(a_1) - \lambda_2 G(a_2)$.

8. Précision de l'approximation

(a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \pi - (\lambda_1 G_{n,a_1} - \lambda_2 G_{n,a_2}) \right| \leq \lambda_1 a_1^{n+1} + \lambda_2 a_2^{n+1}.$$

(b) En déduire un réel K tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \pi - (\lambda_1 G_{n,a_1} - \lambda_2 G_{n,a_2}) \right| \leq \frac{K}{25^{n+1}}.$$

(c) Trouver un entier N_2 pour lequel

$$\forall n \geq N_2, \quad \left| \pi - (\lambda_1 G_{n,a_1} - \lambda_2 G_{n,a_2}) \right| \leq 10^{-6}.$$

Remarques :

- Cette méthode d'approximation de π utilisée par John Machin (1680-1752) permit à ce dernier de calculer "à la main" 100 décimales exactes de π en 1706.
- Les approximations de π à l'aide de séries de Grégory permirent d'obtenir à l'aide d'ordinateurs un million de décimales en 1974. (J. Guilloud et M. Bouyer)
- Aujourd'hui, les mathématiciens ont trouvé d'autres types de techniques encore plus performantes, qui leur permettent de calculer plusieurs milliards de décimales.

Exercice 2 (Annales 2007).

Etude d'une série

1. Quelques premiers résultats.

- (a) Déterminer le rayon de la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n} x^n$.

(b) Montrer que la suite de terme général $\frac{\ln n}{n}$ est monotone à partir d'un certain rang que l'on précisera. En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$.

(c) Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n}$. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$ est-elle absolument convergente ?

(d) Calculer $\int_a^b \frac{\ln t}{t} dt$ où a et b sont des réels strictement positifs.

2. Equivalent de la somme partielle

Soit n_0 un entier et f une fonction continue et décroissante sur $[n_0, +\infty[$.

(a) Montrer que pour tout entier $k \in [n_0, +\infty[$, on a $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k)$.

(b) En déduire un encadrement de $\sum_{k=n_0+1}^n f(k)$ par deux intégrales que l'on précisera.

Expliciter cet encadrement dans le cas où f est la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ (on calculera les intégrales et on précisera n_0).

(c) Déterminer, en justifiant, un équivalent simple de $\sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k}$ lorsque n est au voisinage de $+\infty$ (on l'exprimera à l'aide de $\ln n$).

Exercice 3 (Annales 2007).

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ où f_n est définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f_n(x) = \frac{nx}{n^4 + x^2}$$

converge simplement sur $[0, +\infty[$. On peut donc définir sur $[0, +\infty[$ la fonction S par $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

2. Calculer $\|f_n\|_\infty = \sup_{x \geq 0} |f_n(x)|$. La série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0, +\infty[$?

3. Soit $A > 0$. Montrer que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $[0, A]$. En déduire que la fonction S est continue sur $[0, +\infty[$.

Exercice 4 (Annales 2010).

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(t) = e^{-t^2}$. On pose $I = \int_0^1 e^{-t^2} dt$.

1. Démontrer que la fonction f est développable en série entière (on déterminera la série entière et on précisera son rayon de convergence).

2. En déduire avec soin que :

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}.$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $s_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)}$. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|s_n - I| \leq \frac{1}{(n+1)!(2n+3)}.$$

4. En déduire un entier N_1 tel que pour $n \geq N_1$, on a $|s_n - I| \leq 10^{-6}$.

Exercice 5 (Annales 2011).

Calcul de la somme d'une série

1. Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$.

2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1 et x un réel positif ou nul. Démontrer que :

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt.$$

On pourra partir de $\sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k$ puis intégrer.

3. Démontrer à l'aide d'un encadrement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt = 0$.

4. En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Exercice 6 (Annales 2011).

Autour de la fonction Dilogarithme.

Dans ce problème, on propose une étude de la fonction Dilogarithme définie pour $x \in [-1, 1[$ par :

$$\text{Li}(x) = - \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt$$

On définit sur $[-1, 1[$ la fonction f par $f(t) = -\frac{\ln(1-t)}{t}$ si $t \neq 0$ et $f(0) = 1$.

I Fonction Dilogarithme

1. Montrer que la fonction f est continue sur $[-1, 1[$.
2. Justifier que la fonction Li est de classe C^1 sur $[-1, 1[$ et déterminer sa dérivée.
3. Démontrer que l'intégrale $\int_0^1 f(t) dt$ est convergente.
On en déduit (il est inutile de le redémontrer) que la fonction Li se prolonge par continuité en 1 sur $[-1, 1[$, en posant :

$$\text{Li}(1) = \int_0^1 f(t) dt$$

On continue à noter Li ce prolongement par continuité.

4. *Etude d'une série de fonctions*

a) Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ converge normalement sur $[-1, 1]$.

On note alors S la somme de cette série, c'est à dire :

$$\forall x \in [-1, 1], S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

b) Démontrer, en énonçant précisément le théorème utilisé, que la fonction S est continue sur $[-1, 1]$.

5. *Développement en série entière de Li*

a) Démontrer que pour tout $t \in]-1, 1[$, on a $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n+1}$.

b) Soit x un réel de $] - 1, 1[$ fixé. Démontrer avec soin que $\text{Li}(x) = S(x)$ (on pourra étudier le mode de convergence de la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n+1}$ sur $[0, x]$).

c) Justifier avec soin que l'on a aussi $\text{Li}(1) = S(1)$. En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t} dt$ (on admettra que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$)

II Une relation fonctionnelle du Dilogarithme

On définit sur $]0, 1[$ les fonctions g et h par :

$$g(x) = \text{Li}(x) + \text{Li}(1-x) \quad \text{et} \quad h(x) = -\ln(1-x) \ln(x)$$

6. Justifier que la fonction g est dérivable sur $]0, 1[$ et comparer sa dérivée avec celle de la fonction h .

7. Déterminer la limite de h lorsque x tend vers 0, puis démontrer avec soin la relation fonctionnelle :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad \text{Li}(x) + \text{Li}(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(1-x) \ln(x)$$

Test de 15mn. Mathématiques. Lundi 28 novembre

Merci de répondre directement sur la feuille en justifiant votre réponse.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{2^n \cdot \sqrt{n}}$.

2. Etudier la convergence de la série en $x = R$.

3. Etudier la convergence de la série en $x = -R$.

PARTIE II

ALGÈBRE

CHAPITRE 1

RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

Programme officiel

I. Espaces vectoriels et algèbre linéaire

Définitions générales

Définition d'un espace vectoriel, d'un sous espace, d'une application linéaire, d'un endomorphisme, d'un isomorphisme, d'un automorphisme, d'une forme linéaire. Définition d'une algèbre (associative, unitaire). Définition de l'espace $L(E, F)$ des applications linéaires de E dans F . Définition du noyau et de l'image d'une application linéaire. Définition d'une combinaison linéaire, d'un sous espace engendré par une partie, de la somme de deux sous espaces, de deux sous espaces supplémentaires. Définition d'une homothétie et caractérisation des projecteurs par la relation $p^2 = p$.

Généralités sur les espaces de dimension finie

Définition d'une famille libre, d'une famille liée, d'une famille génératrice, d'une base, d'un espace de dimension finie. Invariance du nombre d'éléments d'une base et théorème de la base incomplète, sous-espaces et somme de sous-espaces, espaces K^n . Caractérisations des applications linéaires entre espaces de dimension finie. Formes linéaires : définition du dual et équation d'un hyperplan. Rang d'une famille de vecteurs, rang d'une application linéaire, théorème du rang et caractérisation des isomorphismes.

Calcul matriciel

Espace $M_{n,p}(K)$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans K et produit matriciel. Algèbre $M_n(K)$, groupe $GL_n(K)$. Matrice d'une application linéaire entre deux espaces de dimension finie, isomorphisme entre $M_{n,p}(K)$ et $L(E, F)$, rang d'une matrice. Définition de la transposée d'une matrice, d'une matrice carrée symétrique ou antisymétrique. Matrice d'un endomorphisme sur une base, changements de base, matrices semblables. Trace d'une matrice carrée et relation : $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

Systèmes linéaires

Discussion des systèmes linéaires : description de l'espace des solutions. Inversion et inversibilité d'une matrice carrée par la méthode du pivot et application à la résolution des systèmes de Cramer.

Déterminants

Définition du groupe des permutations d'un ensemble fini, définition d'une transposition et de la signature d'une permutation : $(-1)^p$ où p est la parité de la décomposition en transpositions.

Formes n -linéaires alternées sur un espace de dimension n , déterminant sur une base d'un système de vecteurs, changement de base, orientation. Déterminant d'une application linéaire, déterminant d'une matrice carrée. Caractérisation d'une base, d'un isomorphisme, d'une matrice carrée inversible. Déterminant de la composée de deux endomorphismes, du produit de deux matrices carrées. Développement par rapport à une ligne ou une colonne, cofacteurs et matrice des cofacteurs, déterminant de la transposée d'une matrice carrée. Déterminants extraits et caractérisation du rang d'une matrice.

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Définition d'une valeur propre d'un endomorphisme, d'un vecteur propre associé (0 n'est

pas vecteur propre), d'un sous espace propre. Définition du polynôme caractéristique d'un endomorphisme, de la trace d'un endomorphisme. Ordre de multiplicité d'une valeur propre. Exemples classiques : homothéties, projecteurs, symétries. Définition d'un endomorphisme diagonalisable : l'espace est somme directe des sous espaces propres, caractérisation des endomorphismes diagonalisables : l'ordre de multiplicité d'une valeur propre est égale à la dimension du sous espace propre associé.

Définition d'une valeur propre d'une matrice de $M_n(K)$ associée à un endomorphisme de K^n , d'un vecteur propre associé et d'un sous espace propre. Polynôme caractéristique d'une matrice carrée et invariance par changements de base. Matrices diagonalisables et caractérisation des matrices diagonalisables.

Les candidats doivent savoir étudier une suite vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre n à coefficients constants et connaître la forme générale des solutions de $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$.

Réduction des endomorphismes

II. Motivations

1. Suites à récurrence linéaire.

Exemple : la suite de Fibonacci. $u_0 = u_1 = 1$, et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Comment faire pour calculer u_{1000} ?

On introduit un système matriciel :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En posant $X_n = (u_n, u_{n+1})$, on doit donc calculer $X_n = A^n \cdot X_0$. On est donc ramené au problème du calcul de A^n avec A une matrice carrée.

Supposons que l'on puisse trouver une base de vecteurs (v_1, v_2) tels que $Av_1 = \lambda_1 v_1$ et $Av_2 = \lambda_2 v_2$. Alors $A^n v_1 = \lambda_1^n v_1$ et $A^n v_2 = \lambda_2^n v_2$. De plus, tout vecteur $v \in \mathbb{R}^2$ s'écrit $v = x_1 v_1 + x_2 v_2$ et :

$$A^n v = x_1 A^n v_1 + x_2 A^n v_2 = x_1 \lambda_1^n v_1 + x_2 \lambda_2^n v_2.$$

2. Systèmes différentiels.

Comment résoudre un système différentiel ? Par exemple :

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x. \end{cases}$$

On peut l'écrire sous la forme :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

On est donc ramené à résoudre l'équation différentielle $X' = A \cdot X$. Nous verrons plus tard que les solutions sont de la forme :

$$X(t) = \exp(tA) \cdot X(0)$$

avec

$$\exp(tA) = \text{Id} + tA + \frac{1}{2}(tA)^2 + \dots + \frac{1}{k!}(tA)^k + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}(tA)^k.$$

Pour le moment, supposons que l'on puisse trouver une base de vecteurs (v_1, v_2) tels que $Av_1 = \lambda_1 v_1$ et $Av_2 = \lambda_2 v_2$. Les fonctions $f_1 : t \mapsto e^{\lambda_1 t} v_1$, $f_2 : t \mapsto e^{\lambda_2 t} v_2$ sont alors solutions de l'équation différentielle. En effet :

$$f_1'(t) = \lambda_1 e^{\lambda_1 t} v_1 = e^{\lambda_1 t} \cdot Av_1 = Af_1(t)$$

et

$$f_2'(t) = \lambda_2 e^{\lambda_2 t} v_2 = e^{\lambda_2 t} \cdot Av_2 = Af_2(t).$$

Les solutions sont les combinaisons linéaires de f_1 et de f_2 .

3. Transformations géométriques. Comment peut-on caractériser les transformations linéaires simples, telle qu'une homothétie, une rotation, une projection ? Que se passe-t-il si on les compose ?

III. Vecteurs propres, valeurs propres, sous-espaces propres

Dans toute la suite, $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , E et F sont des K -espaces vectoriels (on peut ajouter deux vecteurs; on peut multiplier un vecteur par un scalaire, c'est-à-dire par un réel ou un nombre complexe).

Définition 1. Une application $f : E \rightarrow F$ est une application linéaire si

$$\begin{cases} \forall x, y \in E, f(x + y) = f(x) + f(y) \\ \forall \lambda \in K, \forall x \in E, f(\lambda x) = \lambda f(x). \end{cases}$$

Si $F = E$, une application linéaire $f : E \rightarrow E$ est appelée un endomorphisme de E .

Exemples. Une rotation de \mathbb{R}^2 centrée à l'origine. Une homothétie ou une similitude de \mathbb{R}^2 centrée à l'origine. Dans \mathbb{R}^2 , une projection sur une droite passant par l'origine parallèlement à une autre droite passant par l'origine. Dans \mathbb{R}^3 , une projection sur un plan contenant l'origine parallèlement à une droite qui n'est pas contenue dans le plan.

Une translation de vecteur non nul n'est pas une application linéaire.

Définition 2 (cas des endomorphismes). Soit $f : E \rightarrow E$ un endomorphisme.

- $\lambda \in K$ est une *valeur propre* de f s'il existe $v \in E$ un vecteur non nul, tel que $f(v) = \lambda v$.
- un vecteur $v \in E$ est un *vecteur propre* de f si $v \neq 0$ et s'il existe $\lambda \in K$ tel que $f(v) = \lambda v$; on dit alors que v est un vecteur propre associé à λ .
- si $\lambda \in K$ est une valeur propre de f , le *sous-espace propre* associé à λ est l'ensemble $E_\lambda = \{x \in E \mid f(x) = \lambda x\}$.

Proposition 1. Si $f : E \rightarrow E$ est un endomorphisme et si λ est une valeur propre de f , alors l'espace propre associé à λ est $E_\lambda = \text{Ker}(f - \lambda \text{Id})$.

On a des définitions similaires pour les matrices.

Définition 3 (cas des matrices). Soit $A \in M_n(K)$ (une matrice carrée de taille $n \times n$ dont les coefficients appartiennent à K).

- λ est *valeur propre* de A s'il existe un vecteur non nul $X \in K^n$ tel que $A \cdot X = \lambda X$.
- X est un vecteur propre de A si $X \neq (0, 0, \dots, 0)$ et si $A \cdot X = \lambda X$ pour un $\lambda \in K$.
On dit alors que X est un vecteur propre associé à λ .
- Le sous-espace propre associé à λ est $E_\lambda = \{X \in K^n \mid A \cdot X = \lambda X\}$.

IV. Exemples.

1. $f = 0$ ou $A = 0$. Il n'y a qu'une seule valeur propre : $\lambda = 0$. L'espace propre E_0 est égal à E . Tout vecteur non nul est un vecteur propre associé à 0.
2. $f = \text{Id}$ ou $A = I_n$. Il n'y a qu'une seule valeur propre : $\lambda = 1$. L'espace propre E_1 est égal à E . Tout vecteur non nul est un vecteur propre associé à 1.

3. matrice diagonale $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ 0 & \ddots & 0 \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$. Les valeurs propres sont les λ_i . L'espace propre E_{λ_i} est la droite vectorielle $\text{Vect}(e_i)$.

4. matrice diagonale $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de A sont 1 et -2 (les termes diagonaux). Les espaces propres sont :

$$E_1 = \text{Vect}(e_1, e_2) = \{(x, y, 0) \mid x \in K, y \in K\}$$

et

$$E_{-2} = \text{Vect}(e_3) = \{(0, 0, z) \mid z \in K\}.$$

5. matrice triangulaire $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres sont 1 et 3 (les termes diagonaux). Les espaces propres sont $E_1 = \text{Vect}\{(1, 0)\}$ et $E_3 = \text{Vect}\{(-2, 1)\}$.

6. matrice triangulaire $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il n'y a qu'une seule valeur propre : 1. L'espace propre associé est $E_1 = \text{Vect}(e_1)$.

7. endomorphisme de polynômes : $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ définit par $f(P) = XP'$. Les valeurs propres sont les entiers $n \geq 1$. Et l'espace propre E_n est égal à $\text{Vect}(X^n)$.

8. endomorphisme de suites : soit f l'endomorphisme qui à une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ associe la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ définie par $v_0 = 0, v_1 = u_0, v_2 = u_1, \dots$. Il n'y a aucune valeur propre

9. homothéties : il n'y a qu'une seule valeur propre λ et $E_\lambda = E$.

10. projecteurs ($p \circ p = p$) : il y a deux valeurs propres, 0 et 1. On a :

$$E_0 = \text{Ker}(p) \quad \text{et} \quad E_1 = \text{Im}(p).$$

De plus, $E_0 \oplus E_1 = E$.

11. symétries ($s \circ s = \text{Id}$) : il y a deux valeurs propres, 1 et -1 . De plus, s est la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_{-1} .

V. Cas de la dimension finie

A. Rappels sur le déterminant

Définition 4 (déterminant d'une matrice 2×2).

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} := ad - bc.$$

Définition 5 (déterminant d'une matrice 3×3).

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} := a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Définition 6 (par récurrence). Si $A = (a_{i,j})$, on multiplie chaque terme $a_{1,j}$ de la première ligne par $(-1)^{1+j}$ puis par le déterminant Δ_j obtenu en supprimant la première ligne et la j -ème colonne. Le déterminant cherché est égal à la somme des termes $(-1)^{1+j} \cdot a_{1,j} \cdot \Delta_j$ ainsi obtenus.

Proposition 2. $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Corollaire. A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Dans ce cas,

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Attention : $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$.

Proposition 3. Si $f : E \rightarrow E$ est un endomorphisme, si A est la matrice de f dans une base \mathcal{E} et si A' est la matrice de f dans une base \mathcal{E}' , alors $\det(A) = \det(A')$.

Définition 7 (déterminant d'un endomorphisme). Si $f : E \rightarrow E$ est un endomorphisme, le déterminant de f est le déterminant de la matrice de f dans une base quelconque de E .

Proposition 4. Soit $f : E \rightarrow E$ un endomorphisme. Alors

$$f \text{ est un isomorphisme} \iff \det(f) \neq 0.$$

B. Polynôme caractéristique

Proposition 5. Soit f un endomorphisme de E et A la matrice de f dans une base quelconque de E . Alors,

$$\lambda \text{ est valeur propre de } f \iff \det(f - \lambda \text{Id}) = 0 \iff \det(A - \lambda I) = 0.$$

Définition 8. On appelle polynôme caractéristique de A :

$$P_A(X) = \det(A - XI_n).$$

On appelle polynôme caractéristique de f :

$$P_f(X) = \det(f - X\text{Id}).$$

Les valeurs propres sont donc les racines du polynôme caractéristique.

Exemple.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad P_A(X) = (1 - X)(2 - X)^2.$$

Définition 9. Si λ est valeur propre de A (ou de f), elle est racine du polynôme caractéristique : $P_A(X) = (X - \lambda)^{n_\lambda} Q(X)$ avec $Q(\lambda) \neq 0$. L'entier n_λ s'appelle l'*ordre de multiplicité* de λ .

Définition 10 (trace). La trace $\text{tr}(A)$ d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est la somme des coefficients de la diagonale.

Proposition 6. Si $A' = P^{-1}AP$, alors $\text{tr}(A') = \text{tr}(A)$.

Proposition 7. Soit P_A le polynôme caractéristique de $A \in M_n(\mathbb{R})$. Alors P_A est un polynôme de degré n . Le terme de plus haut degré est $(-1)^n X^n$. Le coefficient constant est $P_A(0) = \det(A)$. Le coefficient de X^{n-1} est $(-1)^{n-1} \text{tr}(A)$.

VI. Sous-espaces propres – Diagonalisabilité

A. Les sous-espaces propres sont en somme directe

Proposition 8. Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont des valeurs propres deux à deux distinctes et si v_1, v_2, \dots, v_p sont des vecteurs propres associés, alors $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ est libre. On a une somme directe

$$E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}.$$

Corollaire.

$$\dim(E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}) = \dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} + \dots + \dim E_{\lambda_p}.$$

B. Diagonalisabilité

Définition 11. Un endomorphisme $f : E \rightarrow E$ est diagonalisable s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de f .

Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable s'il existe une base de \mathbb{R}^n formée de vecteurs propres de A .

Proposition 9. Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable si, et seulement si, il existe une matrice inversible $P \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale.

Proposition 10. f est diagonalisable si, et seulement si :

$$E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}.$$

Corollaire. Un endomorphisme ou une matrice est diagonalisable si, et seulement si :

$$\dim E = \dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} + \dots + \dim E_{\lambda_p}.$$

Proposition 11. Soit λ une valeur propre et n_λ sa multiplicité. Alors :

$$1 \leq \dim E_\lambda \leq n_\lambda.$$

Un polynôme P est scindé sur K s'il s'écrit sous la forme :

$$P(X) = a \cdot \prod (X - \alpha_i)^{n_i}$$

avec $\alpha_i \in K$.

Corollaire. Si le polynôme caractéristique est scindé sur K alors f (ou A) est diagonalisable si, et seulement si, $\dim E_{\lambda_i} = n_{\lambda_i}$ pour tout i .

Corollaire. Si le polynôme caractéristique n'est pas scindé sur K alors f (ou A) n'est pas diagonalisable.

Corollaire. Si le polynôme caractéristique est scindé et n'a que des racines simples, alors f ou A est diagonalisable.

C. Matrices symétriques

Définition 12. Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est symétrique si $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout i, j .

Proposition 12. Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est symétrique, alors A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$.

Nous reparlerons de ce résultat dans le chapitre d'algèbre suivant.

Exercices. Feuille 4.

Exercice 1 : Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de M .
2. Déterminer $\text{Ker } f$.
3. Quelle est la dimension de $\text{Im } f$?
4. Soient $u_1 = (1, -1, 0)$, $u_2 = (0, 1, -1)$ et $u_3 = (1, 1, 1)$. Montrer que (u_1, u_2) est une base du plan $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$.
5. Montrer que $f(P) = P$.
6. Sans calculer de matrice de passage, trouver la matrice de f dans la base (u_1, u_2, u_3) .

Exercice 2 : On considère l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 (muni de sa base canonique $e = (e_1, e_2, e_3)$) défini par : $f(e_1) = 2e_1 + 3e_2 + e_3$, $f(e_2) = -4e_2 - 2e_3$, $f(e_3) = 4e_1 + 12e_2 + 5e_3$.

1. Déterminer le noyau de f .
2. Trouver une base de $\text{Im } f$. Soit $(x, y, z) \in \text{Im } f$, donner une équation vérifiée par x, y et z .
3. On considère la base $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ où $\varepsilon_1 = (-4, 3, 2)$, $\varepsilon_2 = (-4, 0, 1)$, $\varepsilon_3 = (2, 1, 0)$. Chercher la matrice de passage entre e et ε . En déduire la matrice de f dans ε .

Exercice 3 : Pour les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

1. trouver les valeurs propres et les espaces propres associés ;
2. lorsque cela est possible, diagonaliser en précisant la matrice de passage.

Exercice 4 : Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ?

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Exercice 5 : Vrai ou faux ?

1. La réunion de deux sous-espaces vectoriels de E en est un.
2. La somme de deux sous-espaces vectoriels de E en est un.
3. L'ensemble des vecteurs propres d'un endomorphisme $f : E \rightarrow E$ est un sous-espace vectoriel de E .
4. Le noyau d'un endomorphisme est un sous-espace propre.
5. L'image d'un endomorphisme est un sous-espace propre.
6. Un sous-espace propre n'est jamais réduit à $\{0\}$.
7. Une matrice carrée et sa transposée ont les mêmes valeurs propres.
8. Une matrice carrée et sa transposée ont les mêmes vecteurs propres.

Exercice 6 : Soit la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Trouver ses valeurs propres, ses sous-espaces propres, leur dimension. Quel est son rang ? Est-elle diagonalisable ?

Exercice 7 : Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 8 : Déterminez explicitement (en fonction de t), les fonction $u(t)$, $v(t)$ et $w(t)$ définies par trois conditions initiales $u(0) = u_0 \in \mathbb{R}$, $v(0) = v_0 \in \mathbb{R}$ et $w(0) = w_0 \in \mathbb{R}$, et par le système différentiel :

$$\begin{cases} u'(t) = -3u(t) - 4v(t) + 2w(t) \\ v'(t) = -u(t) + w(t) \\ w'(t) = -6u(t) - 6v(t) + 5w(t) \end{cases}$$

Annales sur l'algèbre linéaire.

Exercice 1 : (Annales 2003)

Endomorphismes f vérifiant : $\mathcal{Ker} f = \text{Im} f$.

A. Propriétés

1. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n et soit f un endomorphisme de E vérifiant : $\mathcal{Ker} f = \text{Im} f$.
 - (a) Montrer que nécessairement n est un entier pair et déterminer le rang de f en fonction de n .
 - (b) Montrer que, pour tout vecteur x de E , $(f \circ f)(x) = 0$.
2. Soit f un endomorphisme de E vérifiant $f \circ f = 0$ et $\dim E = 2\text{rang}(f)$.
 - (a) Montrer que $\text{Im} f \subset \mathcal{Ker} f$.
 - (b) En déduire que $\mathcal{Ker} f = \text{Im} f$.

B. Cas général

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n et soit f un endomorphisme de E de rang p vérifiant $\mathcal{Ker} f = \text{Im} f$.

3. Donner p en fonction de n .
4. Soit F un supplémentaire de $\mathcal{Ker} f$ dans E , soit (e_1, e_2, \dots, e_p) une base de F et soit $(e'_1, e'_2, \dots, e'_p)$ une base de $\mathcal{Ker} f$.
 - (a) Que peut-on dire de la famille $(e_1, e_2, \dots, e_p, e'_1, e'_2, \dots, e'_p)$?
 - (b) Montrer que la famille $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p))$ est une base de $\text{Im} f$.
 - (c) Posons, pour tout entier i compris entre 1 et p , $e_{p+i} = f(e_i)$; calculer $f(e_{p+i})$.
 - (d) montrer que la famille $(e_1, e_2, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_{2p})$ est une base de E et écrire la matrice de f dans cette base.

C. Application

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 4 de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ et soit f un endomorphisme de E dont la matrice dans la base \mathcal{B} est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Déterminer, en fonction des vecteurs de la base \mathcal{B} , une base de $\mathcal{Ker} f$ et une base de $\text{Im} f$ et, sans aucun calcul, déterminer A^2 .
6. Montrer qu'il existe une base \mathcal{B}' de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire.
7. Déterminer les vecteurs d'une telle base \mathcal{B}' en fonction des vecteurs de la base \mathcal{B} .

Exercice 2 : (Annales 2004)

Racines carrées de matrices

On rappelle que $M_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille 3 à coefficients réels. Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$, on dit qu'une matrice $R \in M_3(\mathbb{R})$ est une racine

carrée de A si $R^2 = A$. Le but de l'exercice est de chercher les racines carrées de la matrice A dans les deux exemples suivants qui sont **indépendants**.

Exemple 1 Cas où $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Réduction de A

Déterminer le polynôme caractéristique de A puis justifier l'existence d'une matrice $P \in M_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$.

2. Montrer que R est une racine carrée de A , si et seulement si la matrice $S = P^{-1}RP$ est une racine carrée de D .

3. Racines carrées de D

Soit S une racine carrée de D .

(a) Montrer que $DS = SD$.

(b) Montrer que la matrice S est diagonale.

(c) Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on note respectivement s_i et d_i les coefficients diagonaux des matrices S et D . Exprimer s_i en fonction de d_i puis en déduire les racines carrées de la matrice D .

4. Ecrire toutes les racines carrées de A à l'aide de la matrice P . (On ne demande pas de calculer P .)

Exemple 2 Cas où $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. **Question préliminaire : Endomorphismes nilpotent**

Soit f un endomorphisme non nul de \mathbb{R}^3 **nilpotent**, c'est-à-dire vérifiant $f^N = 0$ pour un certain entier naturel N .

Il existe alors un entier non nul k tel que $f^{k-1} \neq 0$ et $f^k = 0$.

Le but de la question est de montrer que $k \leq 3$.

Soit x un vecteur de \mathbb{R}^3 tel que $f^{k-1}(x) \neq 0$.

(a) Montrer que pour $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, le vecteur $f^i(x)$ est non nul. (on rappelle que $f^0(x) = x$)

(b) Montrer que les vecteurs $(f^i(x))_{0 \leq i \leq k-1}$ forment une famille libre.

(c) Que peut-on en déduire pour k ? Justifier votre réponse.

Remarque Si une matrice M représente dans une base un endomorphisme f nilpotent, on dit que M est **nilpotente**.

6. Supposons qu'il existe R une racine carrée de A .

(a) Calculer A^2, A^3 . En déduire que R est nilpotente.

(b) Calculer alors R^4 . Comparer avec A^2 puis conclure.

Exercice 3 : (Annales 2005)

Quelques propriétés des endomorphismes nilpotents.

Soit n un entier naturel non nul. On note $M_n(\mathbb{R})$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre n .

On dit qu'un endomorphisme de \mathbb{R}^n (respectivement une matrice M de $M_n(\mathbb{R})$) est **nilpotent** (respectivement **nilpotente**) s'il existe un entier k tel que $f^k = 0$ (respectivement $M^k = 0$).

1. Etude d'un exemple

On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

- Montrer que A est nilpotente.
- Déterminer la dimension du noyau de A .
- Calculer le polynôme caractéristique de A . A est-elle diagonalisable ?

2. Etude d'endomorphismes nilpotents particuliers

Les deux questions suivantes sont indépendantes.

- Soit f un endomorphisme nilpotent de \mathbb{R}^3 tel que $f^2 = 0$ et $f \neq 0$. Comparer $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$, puis calculer la dimension de $\text{Ker } f$.
- Soit f un endomorphisme nilpotent de \mathbb{R}^n tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. Soit x un vecteur de \mathbb{R}^n tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$. Montrer que la famille $\mathcal{B} = \{x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$ est une base de \mathbb{R}^n puis écrire la matrice de f dans cette base.

3. Diagonalisation des matrices nilpotentes.

- Déterminer les matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{R})$ qui sont diagonalisables.
- Application : Déterminer les matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$ qui sont nilpotentes.

Exercice 4 : (Annales 2006)

Etude d'un endomorphisme sur l'espace des polynômes

n désigne un entier naturel, on note $\mathbb{R}_n[X]$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des polynômes à coefficients dans \mathbb{R} , de degré inférieur ou égal à n .

On définit sur $\mathbb{R}_n[X]$, l'application $f : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ par :

$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], f(P(X)) = X(P(X) - P(X-1))$.

1. Résultats préliminaires

- Calculer $f(1), f(X), f(X^2)$.
- Si $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0$, avec $a_n \neq 0$, quel est le terme de plus haut degré du polynôme $P(X-1)$?
- Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $P(X) = P(X-1)$. On pose $Q(X) = P(X) - P(0)$. Montrer que $Q(X)$ est un polynôme constant que l'on précisera.

2. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Déterminer le noyau de f , en déduire la dimension de l'image de f .

4. Dans cette question **uniquement**, on suppose que $n = 2$.

- Quelle est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$? Ecrire la matrice de l'endomorphisme f dans cette base canonique.
- L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

5. Etude de la diagonalisation dans le cas général.

Pour tout entier naturel k , on définit les polynômes P_k par :

$P_0(X) = 1, P_1(X) = X$, et pour tout $k \geq 2, P_k(X) = X(1-X)(2-X) \cdots (k-1-X)$.

- Montrer que la famille $(P_0, P_1, P_2, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
- Soit k un entier naturel, déterminer un nombre réel c_k tel que $f(P_k) = c_k P_k$.

- (c) Déterminer les valeurs propres de f . L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 5 : (Annales 2007)

Notion de sous-espace stable

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et u un endomorphisme de E .

On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est **stable par** u si $u(F) \subset F$.

$\{0\}$ et E sont évidemment des espaces stables pour u , on les appelle sous-espaces triviaux.

On rappelle que si λ est une valeur propre de u , $\text{Ker}(u - \lambda\text{Id})$ est le **sous-espace propre** associé à λ (Id désigne l'endomorphisme identité).

1. Quelques généralités

- (a) Montrer que $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$ sont des sous-espaces stables par u .
- (b) *Un résultat fondamental* : si λ est une valeur propre de u , montrer que le sous-espace propre associé $\text{Ker}(u - \lambda\text{Id})$ est stable par u .
- (c) Soient x_1 et x_2 deux vecteurs propres de u associés respectivement aux valeurs propres λ_1 et λ_2 . Montrer que $\text{Vect}\{x_1, x_2\}$ est stable par u ($\text{Vect}\{x_1, x_2\}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs x_1 et x_2).

2. Un exemple en dimension 3

On considère $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{bmatrix}$ la matrice d'un endomorphisme u dans la

base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de \mathbb{R}^3 .

- (a) Déterminer le polynôme caractéristique de A sous forme factorisée (on vérifiera qu'il s'écrit sous la forme $-(X + a)(X - a)^2$ avec $a > 0$).
- (b) En déduire, **sans aucun calcul**, $\text{Ker } u$ puis $\text{Im } u$.
- (c) Montrer que le sous-espace propre associé à la valeur propre a est un plan P dont on donnera une base (v_1, v_2) (on exprimera les vecteurs v_1 et v_2 en fonction des vecteurs de \mathcal{B}).
- (d) Montrer que le sous-espace propre associé à la valeur propre $-a$ est une droite D dirigée par un vecteur w que l'on exprimera en fonction des vecteurs de \mathcal{B} .
- (e) L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
- (f) Déterminer 6 espaces stables par u , non triviaux ; on explicitera une base de chacun de ces espaces à l'aide des vecteurs v_1, v_2 et w .

3. Quelques exemples géométriques

Pour cette question uniquement, on prendra $E = \mathbb{R}^2$.

Déterminer à l'aide de considérations **géométriques** les **droites stables**, ainsi que leur nombre, des endomorphismes suivants :

- (a) la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\Delta = \text{Vect}(e_1 - e_2)$ où $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est la base canonique de \mathbb{R}^2 ,
- (b) la rotation d'angle $\pi/4$,
- (c) l'homothétie de rapport 2.

4. Un résultat général pour finir

On suppose que la dimension de E est impaire et que u est un endomorphisme de E .

Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ du polynôme caractéristique associé à u . En déduire que u admet au moins une droite stable.

Exercice 6 : (Annales 2008)

Etude de la diagonalisation d'une famille de matrices

Pour tout réel a , on pose $M_a = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2a \\ 0 & 3 & 2a \\ 2 & 2 & 2a+3 \end{bmatrix}$.

- (a) Montrer en justifiant vos calculs, que le polynôme caractéristique de M_a s'écrit

$$\chi_{M_a}(X) = (1 - X)(3 - X)(2a + 3 - X).$$

- (b) En déduire les valeurs de a pour lesquelles la matrice M_a est inversible.
- Justifier que pour $a \notin \{-1, 0\}$, la matrice M_a est diagonalisable.
- Déterminer $\dim \text{Ker}(M_0 - 3I_3)$ où I_3 désigne la matrice unité. La matrice M_0 est-elle diagonalisable (on répondra sans aucun calcul supplémentaire) ?
- La matrice M_{-1} est-elle diagonalisable ?

Exercice 7 : (Annales 2008)

Un vrai-faux

- Soi $A \in M_n(\mathbb{R})$ avec $n \geq 2$. Si $\text{rang } M = 1$, alors 0 est valeur propre de M .
- Si deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ sont semblables, elles ont le même polynôme caractéristique (on rappelle que deux matrices A et B de $M_n(\mathbb{R})$ sont semblables s'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$).
- Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, la matrice $A + {}^tA$ est diagonalisable (tA désigne la transposée de A).

Exercice 8 : (Annales 2009)

Etude d'un système linéaire de suites récurrentes

Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ et $N = A - 2I_3$ où I_3 désigne la matrice unité de $M_3(\mathbb{R})$.

- La matrice A est-elle inversible ? Justifier votre réponse.
- La matrice A est-elle diagonalisable ? Justifier votre réponse.
- Calculer N^3 .
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer A^n en utilisant la formule du binôme de Newton (donner la réponse sous la forme d'un tableau de nombres 3 lignes \times 3 colonnes).
- On définit pour $n \in \mathbb{N}$, les suites (u_n) , (v_n) et (w_n) par

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + v_n \\ v_{n+1} = 2v_n + w_n \\ w_{n+1} = 2w_n \end{cases},$$

avec les conditions initiales $u_0 = v_0 = 1$ et $w_0 = 2$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Exprimer X_{n+1} en fonction de X_n et de A puis en déduire X_n en fonction de X_0 .
- En déduire u_n , v_n et w_n en fonction de n .

Exercice 9 : (Annales 2010)**Commutant d'une matrice**

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre trois et on considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pour toute matrice K de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on appelle commutant de K l'espace vectoriel noté $\mathcal{C}(K)$ des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec K , c'est-à-dire :

$$\mathcal{C}(K) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid KM = MK\}.$$

Le but de l'exercice est de déterminer la dimension de $\mathcal{C}(A)$, le commutant de A .

1. Démontrer que pour toute matrice K de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, l'ensemble $\mathcal{C}(K)$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Démontrer que la matrice A est diagonalisable et déterminer une matrice P inversible de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$ (on pourra utiliser sa calculatrice et ne pas détailler tous les calculs). L'expression de la matrice P n'est pas utile pour la suite.

3. Démontrer que la matrice $M' = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ commute avec D si et seulement

$$\text{si } M' = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{bmatrix}.$$

4. En déduire une base de l'espace vectoriel $\mathcal{C}(D)$ (on pourra exprimer la base à l'aide des matrices élémentaires E_{ij} : E_{ij} désigne la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la ligne i et de la colonne j qui vaut 1).
5. On note φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui à une matrice M associe la matrice $P^{-1}MP$.
 - (a) Démontrer que $M \in \mathcal{C}(A)$ si et seulement si $\varphi(M) \in \mathcal{C}(D)$.
 - (b) Démontrer que l'application φ est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{C}(A)$ dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}(D)$. En déduire la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{C}(A)$.

Exercice 10 : (Annales 2011)**Une trigonalisation**

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . On note

u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base \mathcal{B} est la matrice A . On rappelle que si v est un endomorphisme, la notation v^2 désigne l'endomorphisme $v \circ v$.

1. *Questions préliminaires*
 - (a) Déterminer une base de $\text{Ker}(u - 2\text{id})$.

(b) Déterminer une base du noyau de l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 3 & 4 & -6 \\ 3 & 4 & -6 \end{bmatrix}$.

2. Donner le polynôme caractéristique de A sous forme factorisée (il est inutile de détailler les calculs) puis indiquer, sans aucun calcul supplémentaire, si A est diagonalisable.
3. Ecrire la matrice dans la base canonique de l'endomorphisme $(u - 2\text{id})^2$. Comparer avec la matrice B .
4. Un calcul non demandé montre que $\text{Ker}(u - 3\text{id})$ est la droite engendrée par le vecteur $e'_1 = (1, 1, 1)$. Démontrer que :

$$\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(u - 3\text{id}) \oplus \text{Ker}((u - 2\text{id})^2).$$

5. *Un résultat utile* : soit v un endomorphisme de \mathbb{R}^3 de rang 2, tel que $v^2 \neq 0$ et tel que $\text{Ker } v \neq \text{Ker } v^2$.
 - (a) Démontrer que $\text{Ker } v \subset \text{Ker } v^2$.
 - (b) Déterminer avec soin la dimension de $\text{Ker } v$ et de $\text{Ker } v^2$.
 - (c) En déduire que si a est un vecteur de $\text{Ker } v^2$ qui n'est pas dans $\text{Ker } v$, alors la famille $(a, v(a))$ est une base de $\text{Ker } v^2$.
6. Jusqu'à la fin de l'exercice, on pose $v = u - 2\text{id}$. On considère le vecteur $e'_2 = (2, 0, 1)$ qui est dans $\text{Ker } v^2$ mais pas dans $\text{Ker } v$. On pose $e'_3 = v(e'_2)$ et on rappelle que $e'_1 = (1, 1, 1)$ est un vecteur de $\text{Ker}(u - 3\text{id})$. Enfin, on note $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$.
 - (a) Indiquer le numéro de deux questions précédentes qui permettent de conclure directement que la famille \mathcal{B}' est une base de \mathbb{R}^3 .
 - (b) Ecrire la matrice de l'endomorphisme u dans la base \mathcal{B}' .

Nom :

Prénom :

Question de cours

La matrice $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ a-t-elle des valeurs propres ? Si oui, lesquelles ?

Nom :

Prénom :

Question de cours

La matrice $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ a-t-elle des valeurs propres ? Si oui, lesquelles ?

Nom :

Prénom :

Test de 15mn. Mathématiques. Lundi 10 octobre

Merci de répondre directement sur la feuille en justifiant votre réponse.

1. Etudier la convergence de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$.

2. Quelles sont les valeurs propres de la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$? Cette matrice est-elle diagonalisable ?

Nom :

Prénom :

Test de 15mn. Mathématiques. Lundi 24 octobre

Merci de répondre directement sur la feuille en justifiant votre réponse.

1. Déterminer le polynôme caractéristique, les valeurs propres de la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,
et la multiplicité de chaque valeur propre.

2. Déterminer l'espace propre associé à la valeur propre 2. Quelle est sa dimension ?

3. La matrice A est-elle diagonalisable ?
(On pourra comparer dimension d'espace propre et multiplicité de valeur propre)

Évaluation

I. Programme

Intégrales

Linéarité : $\int_a^b \lambda f(t) + g(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$.

Monotonie : si $f \leq g$, alors $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$.

Relation de Chasles : $\int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt = \int_a^c f(t) dt$.

$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$.

Première formule de la moyenne : si f est continue sur $[a, b]$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt = f(c)$.

Une fonction continue et positive, définie sur un segment $[a, b]$, est nulle si et seulement si son intégrale est nulle.

Primitives d'une fonction continue.

Intégration par parties des fonctions de classe C^1 .

Changement de variable.

Intégrales généralisées

Savoir reconnaître une intégrale généralisée et identifier les problèmes (bornes infinies ou discontinuité de la fonction).

En une borne **infinie**, si la fonction admet une limite et si l'intégrale converge, alors la limite est nulle. Attention, le fait que la limite soit nulle n'implique pas la convergence de l'intégrale. Le fait que l'intégrale converge n'implique pas que f a une limite.

En une borne **finie**, si la fonction admet une limite finie, l'intégrale est convergente. Attention, le fait que l'intégrale converge n'implique pas que f a une limite.

Changement de variable.

Comparaison série intégrale : si $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est continue et décroissante, l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$ et la série $\sum_{k \geq a} f(k)$ sont de même nature.

Théorème sur les équivalents en une borne finie ou infinie. Si $f, g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ sont continues, **positives** et si $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x)$, alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ sont de même nature. Si $f, g :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ sont continues, **positives** et si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$, alors

$\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ sont de même nature.

Critère de Riemann : $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$ et $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge ssi $\alpha < 1$.

Diagonalisation

Je fais les rappels pour les matrices carrées $A \in M_n(\mathbb{R})$. C'est également valable pour les endomorphismes $f : E \rightarrow E$.

Connaître la définition d'un vecteur propre (0 n'est pas vecteur propre), d'une valeur propre et d'un sous-espace propre.

Savoir calculer un polynôme caractéristique : $\chi_A(X) = \det(A - XI_n)$. Le terme de plus haut degré est $(-1)^n X^n$.

Savoir démontrer que deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique.

La multiplicité d'une valeur propre λ est le plus grand exposant n_λ tel que $\chi_A(X)$ se factorise par $(X - \lambda)^{n_\lambda}$.

On a toujours $1 \leq \dim(E_\lambda) \leq n_\lambda$.

Définition : A est diagonalisable ssi il existe P inversible et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

A est diagonalisable ssi il existe une base de vecteurs propres.

A est diagonalisable ssi $\chi_A(X)$ est scindé et la dimension de chaque espace propre E_λ est égal à l'ordre de multiplicité n_λ de la valeur propre λ .

Une matrice réelle symétrique est diagonalisable.

EPCM. Contrôle continu n°2.
Sujet type. Durée 1h30.

N.B. Les calculatrices, les documents et les téléphones portables sont interdits. Il est demandé de soigner la présentation.

Barème indicatif: Exercice 1 : 7 pts ; Exercice 2 : 10 pts ; Exercice 3 : 3 pts.

Exercice 1 :

1. Donner un équivalent simple en 0^+ de la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$. En déduire que la fonction $F : x \mapsto \int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ est bien définie et est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$.
2. (a) Donner la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\frac{3}{2}}} dt$.
(b) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $\int_1^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.
3. Montrer avec soin qu'une fonction continue sur $[0, +\infty[$ et qui admet une limite finie en $+\infty$ est bornée. En déduire que F est une fonction bornée.

Exercice 2 : Etude de la diagonalisation d'une famille de matrices

Pour tout réel a , on pose $M_a = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2a \\ 0 & 3 & 2a \\ 2 & 2 & 2a+3 \end{bmatrix}$.

1. (a) Montrer en justifiant vos calculs, que le polynôme caractéristique de M_a s'écrit
$$\chi_{M_a}(X) = (1 - X)(3 - X)(2a + 3 - X).$$

(b) En déduire les valeurs de a pour lesquelles la matrice M_a est inversible.
2. Justifier que pour $a \notin \{-1, 0\}$, la matrice M_a est diagonalisable.
3. Déterminer $\dim \text{Ker}(M_0 - 3I_3)$ où I_3 désigne la matrice unité. La matrice M_0 est-elle diagonalisable (on répondra sans aucun calcul supplémentaire) ?
4. La matrice M_{-1} est-elle diagonalisable ?

Exercice 3 : Un vrai-faux

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ avec $n \geq 2$. Si $\text{rang } A = 1$, alors 0 est valeur propre de A .
2. Si deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ sont semblables, elles ont le même polynôme caractéristique (on rappelle que deux matrices A et B de $M_n(\mathbb{R})$ sont semblables s'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$).
3. Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, la matrice $A + {}^tA$ est diagonalisable (tA désigne la transposée de A).

EPCM. Contrôle continu n°2.
Lundi 7 novembre 2011. Durée 1h30.

N.B. Les calculatrices, les documents et les téléphones portables sont interdits. Il est demandé de soigner la présentation.

Barème indicatif: Exercice 1 : 7 pts ; Exercice 2 : 10 pts ; Exercice 3 : 3 pts.

Exercice 1 :

1. Donner un équivalent simple en 0^+ de la fonction $t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t}$. En déduire que la fonction $F : x \mapsto \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t} dt$ est bien définie et est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$.
2. (a) Donner la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$.
(b) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $\int_1^x \frac{\cos t}{t} dt$ admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.
3. En déduire la limite de $F(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Exercice 2 : Etude de la diagonalisation d'une famille de matrices

Pour tout réel a , on pose $M_a = \begin{bmatrix} 3 & 2a & -1 \\ -a & 4 - 2a & a \\ -1 & 2a & 3 \end{bmatrix}$.

1. (a) Montrer en justifiant vos calculs, que le polynôme caractéristique de M_a s'écrit
$$\chi_{M_a}(X) = (2 - X)(4 - X)(4 - 2a - X).$$

(b) En déduire les valeurs de a pour lesquelles la matrice M_a est inversible.
2. Justifier que pour $a \notin \{0, 1\}$, la matrice M_a est diagonalisable.
3. Déterminer la transposée de M_0 . La matrice M_0 est-elle diagonalisable ?
4. Déterminer $\dim \text{Ker}(M_1 - 2I_3)$ où I_3 désigne la matrice unité. La matrice M_1 est-elle diagonalisable (on répondra sans aucun calcul supplémentaire) ?

Exercice 3 : Un vrai-faux

1. Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ une fonction continue positive. L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ est convergente si, et seulement si, $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
2. Soit A une matrice diagonalisable dont la seule valeur propre est 1. Alors A est la matrice identité.
3. Soit A une matrice dont le polynôme caractéristique est scindé. Alors A est diagonalisable.

CHAPITRE 2

GÉOMÉTRIE

Programme officiel

Espaces affines de dimensions 2 et 3

Définition, applications et transformations affines. Repères cartésiens, équations de droites et de plans. Barycentres et utilisation des coordonnées barycentriques.

Espaces vectoriels Euclidiens de dimension finie

Produit scalaire et norme Euclidienne, sous espaces orthogonaux, bases orthonormales. Identification des formes linéaires et des vecteurs. Orientation et produit vectoriel. Projections orthogonales. Transformations orthogonales et matrices orthogonales. Toute matrice symétrique réelle, A , est diagonalisable sur \mathbb{R} et $A = QD^tQ$, avec Q orthogonale (la démonstration de ce théorème n'est pas exigible des candidats). Angle de deux vecteurs dans le plan orienté et angle de deux vecteurs dans l'espace.

Géométrie affine Euclidienne en dimensions 2 et 3

Distances, angles. Aire du parallélogramme et volume du parallélépipède. Définition d'une isométrie. Caractérisation des isométries directes du plan et de l'espace. Similitudes directes du plan : écriture à l'aide des complexes. Cercle et sphère.

Espaces Euclidiens

I. Définition, exemples

Définition 1. E espace vectoriel sur \mathbb{R} (dimension finie ou non) et $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

- φ est une *forme bilinéaire* si les applications $x \mapsto \varphi(x, y)$ et $y \mapsto \varphi(x, y)$ sont linéaires :
 $\varphi(\lambda x + x', y) = \lambda\varphi(x, y) + \varphi(x', y)$ et $\varphi(x, \lambda y + y') = \lambda\varphi(x, y) + \varphi(x, y')$.
- φ est *symétrique* si $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.
- φ est *positive* si $\varphi(x, x) \geq 0$ pour tout x .
- φ est *définie positive* si $\varphi(x, x) \geq 0$ pour tout x avec égalité si et seulement si $x = 0$.

Définition 2. E ev sur \mathbb{R} muni d'une forme φ bilinéaire symétrique définie positive est dit préhilbertien et φ est un produit scalaire.

Si E est de dimension finie, E est un *espace euclidien*.

Exemples.

- $E = \mathbb{R}^n$ et $\varphi(a, y) = \sum x_i y_i$.
- $E = \mathbb{R}^n$ et $\varphi(x, y) = \sum \lambda_i x_i y_i$ avec $\lambda_i > 0$.
- $E = M_n(\mathbb{R})$ et $\varphi(A, B) = \text{Trace}({}^tAB) = \sum a_{i,j} b_{i,j}$.
- $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et $\varphi(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t) dt$.

Définition 3. $(\cdot | \cdot)$ produit scalaire sur E .

La *norme d'un vecteur* $x \in E$ est : $\|x\| := \sqrt{(x | x)}$.

Proposition 1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). $(\cdot | \cdot)$ produit scalaire sur E . Alors :

$$|(x | y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

avec égalité si, et seulement si, x et y sont colinéaires.

Preuve. Le polynôme $P(\lambda) = (x + \lambda y | x + \lambda y)$ est un polynôme de degré 2 qui soit n'a pas de racine, soit a une racine double. Son discriminant $b^2 - 4ac$ est ≥ 0 et ne s'annule que si P a une racine double. \square

Proposition 2 (Propriétés de la norme). Pour tous vecteurs x et y et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a les trois propriétés suivantes :

1. $\|x\| \geq 0$ et $\|x\| = 0$ si, et seulement si, $x = 0$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

Preuve de l'inégalité triangulaire. On a $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x | y)$ et on applique Cauchy-Schwarz. \square

II. Orthogonalité

Définition 4. Deux vecteurs x et y sont *orthogonaux* si $(x | y) = 0$. On note $x \perp y$.

Proposition 3 (Pythagore). Les vecteurs x et y sont orthogonaux si, et seulement si :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Définition 5. Une base est *orthonormée* si les vecteurs de la base sont de norme 1 et sont deux à deux orthogonaux.

Proposition 4. Si (e_1, e_2, \dots, e_n) est une base orthonormée de E , alors pour tout vecteur x de E , on a :

$$x = (e_1 | x)e_1 + (e_2 | x)e_2 + \dots + (e_n | x)e_n.$$

Proposition 5 (Procédé d'orthogonalisation de Schmidt)

Si (e_1, \dots, e_n) est une base de E , il existe une base orthonormée (e'_1, \dots, e'_n) telle que pour tout $k \leq n$, $\text{Vect}(e'_1, \dots, e'_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$.

Proposition 6. Si F est un sous-espace vectoriel de E , l'ensemble :

$$F^\perp := \{x \in E \mid (\forall x \in F) (x | y) = 0\}$$

est un sous espace vectoriel de E .

Définition 6. Si F est un sous-espace vectoriel de E , l'ensemble F^\perp est appelé l'*orthogonal* de F . Si $x \in F^\perp$, x est *orthogonal* à F .

Proposition 7. Les espaces F et F^\perp sont supplémentaires.

Définition 7. Si F est un sev de E , la projection orthogonale sur F est la projection orthogonale sur F parallèlement à F^\perp .

Proposition 8. Si (e_1, \dots, e_k) est une base de F , sev de E , et si p_F est la projection orthogonale sur F , alors :

$$p_F(x) = (e_1 | x)e_1 + \dots + (e_k | x)e_k.$$

Proposition 9. Si F sev de E et si p_F est la projection orthogonale sur F , alors pour tout x dans E , $p_F(x)$ est l'unique vecteur de F qui minimise la fonction $y \mapsto \|y - x\|$:

$$\forall y \in F, \quad \|p_F(x) - x\| \leq \|y - x\|$$

avec égalité si, et seulement si, $y = p_F(x)$.

III. Isométries et matrices orthogonales

Définition 8. Une application $f : E \rightarrow E$ est une isométrie sur $\|f(x)\| = \|x\|$.

Exemple. Rotation dans \mathbb{R}^2 .

Proposition 10. f est un isométrie si, et seulement si, $(f(x) | f(y)) = (x | y)$. En particulier, si $x \perp y$, alors $f(x) \perp f(y)$.

Proposition 11. Soit (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormée. Alors, f est une isométrie si, et seulement si, $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base orthonormée.

Définition 9. Une matrice $Q \in M_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si ${}^tQ \cdot Q = I_n$.

Exemple. $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Proposition 12. Si (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormée, f est une isométrie si, et seulement si, la matrice de f dans la base (e_1, \dots, e_n) est orthogonale.

Proposition 13. Si Q est une matrice orthogonale, alors $\det(Q) = \pm 1$.

IV. Endomorphismes symétriques et matrices symétriques

Définition 10. $f : E \rightarrow E$ est symétrique si pour tout x, y , on a :

$$(f(x) \mid y) = (x \mid f(y)).$$

Définition 11. $A \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique si ${}^tA = A$.

Proposition 14. (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormée, f est symétrique si, et seulement si, la matrice de f dans la base (e_1, \dots, e_n) est symétrique.

Proposition 15. Si f est un endomorphisme symétrique, alors f est diagonalisable dans une base orthonormée.

Corollaire. Si A est une matrice symétrique, alors A est diagonalisable dans une base orthonormée : il existe une matrice Q orthogonale telle que :

$${}^tQ A Q (= Q^{-1} A Q) = D$$

avec D diagonale.

Feuille d'exercices sur l'algèbre bilinéaire

Exercice 1 : Dans chacun des cas suivants, déterminer si l'application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel E :

1. $E = \mathbb{R}^2$, $\varphi((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1x_2 - y_1y_2$.
2. $E = \mathbb{R}^2$, $\varphi((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1x_2 - \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1) + y_1y_2$.
3. $E = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue } 2\pi\text{-périodique}\}$, $\varphi(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt$.

Exercice 2 : Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2$. Etudier le cas d'égalité.

Exercice 3 : Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. Montrer que $\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geq n^2$. Etudier le cas d'égalité.

Exercice 4 : Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et positive. On pose $I_n = \int_0^1 t^n f(t) dt$. Montrer que $I_{n+p}^2 \leq I_{2n} I_{2p}$.

Exercice 5 : Appliquer la méthode d'orthonormalisation de Gram-Schmidt dans les cas suivants :

1. $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ dans \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire usuel.

2. $P = 1$, $Q = X$, $R = X^2$ dans $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t) dt$.

Exercice 6 : Soit φ la forme bilinéaire symétrique sur \mathbb{R}^3 définie par

$$\varphi(x, y) = (x_1 - 2x_2)(y_1 - 2y_2) + x_2y_2 + (x_2 + x_3)(y_2 + y_3).$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire.
2. A l'aide de la méthode de Gram-Schmidt, orthonormaliser la base canonique de \mathbb{R}^3 pour le produit scalaire φ .

Exercice 7 : Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont orthogonales ?

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}, B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}, C = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ -1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}, D = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Exercice 8 : Pour chaque matrice orthogonale de l'exercice précédente, décrire géométriquement l'isométrie de \mathbb{R}^2 correspondante.

Exercice 9 : On munit \mathbb{R}^3 du produit scalaire usuel (\cdot, \cdot) . Soit $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 , P le plan d'équation $x + y + z = 0$ et σ la symétrie orthogonale par rapport à P .

1. Montrer que les vecteurs $v_1 = e_1 - e_3$ et $v_2 = e_2 - e_3$ forment une base de P et que $v_3 = e_1 + e_2 + e_3$ engendre la droite $D = P^\perp$. Appliquer la méthode de Gram-Schmidt à la base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ pour obtenir une base orthonormée

$\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$ puis écrire la matrice de passage Q de la base \mathcal{B}_0 à la base \mathcal{C} et déterminer Q^{-1} .

2. Écrire la matrice $S = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\sigma)$, puis calculer $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\sigma)$ en l'exprimant en fonction de S et Q .

Exercice 10 : (Annales 2005)

Exercice : quelques propriétés de l'ensemble des matrices orthogonales

Dans cet exercice, n est un entier naturel non nul et on note :

$M_n(\mathbb{R})$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre n .

Pour une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$, tA est sa matrice transposée et $\text{Tr}(A)$ sa trace.

I_n la matrice unité de $M_n(\mathbb{R})$.

$O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $M_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire des matrices M vérifiant : ${}^tMM = I_n$.

Un produit scalaire sur l'espace des matrices réelles

Si A et B sont deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$, on pose $(A | B) = \text{Tr}({}^tAB)$.

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Exprimer $\text{Tr}({}^tAA)$ en fonction des coefficients de A .
2. Montrer que $(|)$ définit un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.

La norme associée à ce produit scalaire (norme de Schur) est notée : pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\|A\| = \sqrt{(A | A)}$.

Ensemble des matrices orthogonales

3. Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$, quelle(s) valeur(s) peut prendre le déterminant de A ?
 $O_n(\mathbb{R})$ est-il un espace vectoriel ?
4. $O_n(\mathbb{R})$ est-il une partie bornée de $M_n(\mathbb{R})$ pour la norme de Schur ? Répondre à la même question, pour une norme quelconque sur $M_n(\mathbb{R})$.

J'ai recopié le sujet tel quel. Il ne vous est actuellement pas possible de répondre à la question: "Répondre à la même question, pour une norme quelconque sur $M_n(\mathbb{R})$ ".

Évaluation

I. Programme

Réels

Définition de sup et inf.

Suites numériques

Savoir définir et manipuler $u_n = o(v_n)$, $u_n = O(v_n)$ et $u_n \sim v_n$.

Savoir démontrer que si (u_n) est bornée et (v_n) converge vers 0, alors $(u_n v_n)$ converge vers 0.

Savoir démontrer que si deux suites sont adjacentes, alors elles convergent et ont même limite.

Savoir énoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass : de toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

Savoir calculer la limite d'une suite, par exemple à l'aide d'équivalents quand il y a une forme indéterminée.

Séries numériques

Définition d'une série, d'une série convergente, et de sa somme.

Savoir ce qu'est une série absolument convergente.

Savoir que si une série est absolument convergente, alors elle est convergente.

Savoir que pour les **séries à termes positifs**, deux séries de termes équivalents sont de même nature. Ne pas oublier de préciser que les séries sont à termes positifs pour utiliser ce résultat.

Séries de Riemann.

Règle de d'Alembert : si $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$ converge vers une limite $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente (donc convergente).

Savoir ce qu'est une série alternée. Ne pas oublier de vérifier d'hypothèse, en particulier, $|u_n|$ doit être décroissant. Il faut vérifier 3 points : $(-1)^n u_n$ ne change pas de signe, $u_n \rightarrow 0$ et $|u_n|$ est décroissante.

Savoir qu'une série alternée vérifiant les trois points précédents est convergente.

Connaître un exemple de suite telle que $(-1)^n u_n \geq 0$ et $u_n \rightarrow 0$, mais telle que la série $\sum u_n$ soit divergente. Par exemple, $\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} + \frac{1}{k}$.

Intégrales

Linéarité : $\int_a^b \lambda f(t) + g(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$.

Monotonie : si $f \leq g$, alors $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$.

Relation de Chasles : $\int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt = \int_a^c f(t) dt$.

$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$.

Première formule de la moyenne : si f est continue sur $[a, b]$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel

que $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt = f(c)$.

Une fonction continue et positive, définie sur un segment $[a, b]$, est nulle si et seulement si son intégrale est nulle.

Primitives d'une fonction continue.

Intégration par parties des fonctions de classe C^1 .

Changement de variable.

Intégrales généralisées

Savoir reconnaître une intégrale généralisée et identifier les problèmes (bornes infinies ou discontinuité de la fonction).

En une borne **infinie**, si la fonction admet une limite et si l'intégrale converge, alors la limite est nulle. Attention, le fait que la limite soit nulle n'implique pas la convergence de l'intégrale. Le fait que l'intégrale converge n'implique pas que f a une limite.

En une borne **finie**, si la fonction admet une limite finie, l'intégrale est convergente. Attention, le fait que l'intégrale converge n'implique pas que f a une limite.

Changement de variable.

Comparaison série intégrale : si $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est continue et décroissante, l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$ et la série $\sum_{k \geq a} f(k)$ sont de même nature.

Théorème sur les équivalents en une borne finie ou infinie. Si $f, g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ sont continues, **positives** et si $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x)$, alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ sont de même nature. Si $f, g :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ sont continues, **positives** et si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$, alors

$\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ sont de même nature.

Critère de Riemann : $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$ et $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge ssi $\alpha < 1$.

Suites de fonctions

Définition et vérification : convergence simple, convergence uniforme.

Continuité de la limite, échange limite et intégrale, dérivabilité de la limite. Attention, pour passer à la limite sur les dérivées, il faut la convergence uniforme de la suite des dérivées.

Savoir par exemple dire que la convergence n'est pas uniforme si les f_n sont continues mais que la limite ne l'est pas. Il n'y a cependant pas équivalence : si les f_n sont continues et que la limite f est aussi continue, ceci n'implique PAS la convergence uniforme.

Séries de fonctions

Définition et vérification : convergence normale (qui implique) convergence uniforme et convergence absolue (qui impliquent chacune) convergence simple.

Continuité de la somme, intégration terme à terme, échange série et intégrale, dérivabilité de la somme. Attention pour dériver la somme, on vérifie en général la convergence normale de la série des dérivées.

Séries alternées de fonctions.

Séries entières

Savoir ce qu'est une série entière : $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

Rayon de convergence. Définition : si $|x| < R$ alors la série converge et si $|x| > R$ alors la série diverge. On ne sait pas a priori ce qui se passe pour $|x| = R$.

Propriétés : si $|x| < R$, alors la suite $a_n x^n$ est bornée et tend vers 0. Si $|x| > R$, alors la suite $a_n x^n$ n'est pas bornée.

Règle de d'Alembert : si $|a_{n+1}/a_n|$ tend vers ℓ , alors $R = 1/\ell$. Attention, $|a_{n+1}/a_n|$ n'a pas nécessairement une limite.

Convergence normale sur $[-r, r]$ pour tout $r < R$.

Continuité de la somme sur $] - R, R[$. La somme est C^∞ sur $] - R, R[$ et on peut dériver termes à termes.

Intégration terme à terme sur $[a, b] \subset] - R, R[$.

Rayon de convergence de la somme de deux séries entières.

Développement en série entière en x_0 d'une fonction.

Solutions développables en séries entières d'une équation différentielle.

Diagonalisation

Je fais les rappels pour les matrices carrées $A \in M_n(\mathbb{R})$. C'est également valable pour les endomorphismes $f : E \rightarrow E$.

Connaître la définition d'un vecteur propre (0 n'est pas vecteur propre), d'une valeur propre et d'un sous-espace propre.

Savoir calculer un polynôme caractéristique : $\chi_A(X) = \det(A - XI_n)$. Le terme de plus haut degré est $(-1)^n X^n$.

Savoir démontrer que deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique.

La multiplicité d'une valeur propre λ est le plus grand exposant n_λ tel que $\chi_A(X)$ se factorise par $(X - \lambda)^{n_\lambda}$.

On a toujours $1 \leq \dim(E_\lambda) \leq n_\lambda$.

Définition : A est diagonalisable ssi il existe P inversible et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

A est diagonalisable ssi il existe une base de vecteurs propres.

A est diagonalisable ssi $\chi_A(X)$ est scindé et la dimension de chaque espace propre E_λ est égal à l'ordre de multiplicité n_λ de la valeur propre λ .

Une matrice réelle symétrique est diagonalisable avec matrice de passage orthogonale.

Produit scalaire

Connaître la définition d'un produit scalaire et savoir le vérifier. En particulier, savoir montrer que $(f, g) \mapsto \int_a^b f(t)g(t) dt$ est un produit scalaire sur l'espace des fonctions continues de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . Pour cela, il faut savoir que si f est continue sur $[a, b]$ et si $\int_a^b f^2(t) dt = 0$, alors $f = 0$.

Définition de la norme associée à un produit scalaire. Propriétés de la norme : $\|x\| \geq 0$ et $\|x\| = 0$ ssi $x = 0$; $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$; $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Définition de l'orthogonalité entre deux vecteurs.

Inégalité de Cauchy-Schwarz. : $|(x|y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Savoir que $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y)$ ainsi que le théorème de Pythagore : si $x \perp y$, alors $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Définition de l'orthogonal F^\perp d'un sous espace vectoriel $F \subset E$.

Définition d'une isométrie : c'est une application linéaire qui vérifie $\|f(x)\| = \|x\|$ pour tout x .

Propriétés : une isométrie préserve le produit scalaire : $(f(x)|f(y)) = (x|y)$; une application linéaire est une isométrie ssi elle envoie une base orthonormée sur une base orthonormée.

Définition de matrice orthogonale : ${}^tQ \cdot Q = I$.

Propriété : une application linéaire est une isométrie ssi sa matrice dans une base orthonormée est orthogonale.

EPCM. Examen final.
Sujet type. Durée 3h.

N.B. Les calculatrices, les documents et les téléphones portables sont interdits. Il est demandé de soigner la présentation.

Exercice 1 : Calcul de la somme d'une série

1. Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$.
2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1 et x un réel positif ou nul. Démontrer que :

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt.$$

On pourra partir de $\sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k$ puis intégrer.

3. Démontrer à l'aide d'un encadrement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt = 0$.
4. En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Exercice 2 : Soit $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.

1. Montrer que la série définissant la fonction ζ converge normalement sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 1$.
2. En déduire que ζ est continue sur $]1, +\infty[$.

Exercice 3 : Commutant d'une matrice

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre trois et on considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pour toute matrice K de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on appelle commutant de K l'espace vectoriel noté $\mathcal{C}(K)$ des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec K , c'est-à-dire :

$$\mathcal{C}(K) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid KM = MK\}.$$

Le but de l'exercice est de déterminer la dimension de $\mathcal{C}(A)$, le commutant de A .

1. Démontrer que pour toute matrice K de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, l'ensemble $\mathcal{C}(K)$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Démontrer que la matrice A est diagonalisable et déterminer une matrice P inversible de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$ (on pourra utiliser sa calculatrice et ne pas détailler tous les calculs). L'expression de la matrice P n'est pas utile pour la suite.

3. Démontrer que la matrice $M' = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ commute avec D si et seulement

$$\text{si } M' = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{bmatrix}.$$

4. En déduire une base de l'espace vectoriel $\mathcal{C}(D)$ (on pourra exprimer la base à l'aide des matrices élémentaires E_{ij} : E_{ij} désigne la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la ligne i et de la colonne j qui vaut 1).
5. On note φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui à une matrice M associe la matrice $P^{-1}MP$.
- (a) Démontrer que $M \in \mathcal{C}(A)$ si et seulement si $\varphi(M) \in \mathcal{C}(D)$.
 - (b) Démontrer que l'application φ est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{C}(A)$ dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}(D)$. En déduire la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{C}(A)$.

Exercice 4 : Répondre par vrai ou faux, et surtout **justifier avec précision** votre réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Attention, toute réponse sans justification ne sera pas prise en compte.

1. La matrice nulle est-elle diagonalisable ?
2. La forme $\varphi \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \right) = x_1x_2 + x_1y_1 + x_2y_2 + y_1y_2$ définit un produit scalaire sur \mathbb{R}^2 .
3. L'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$ est convergente.

EPCM. Examen final.

Durée 3h.

N.B. Les calculatrices, les documents et les téléphones portables sont interdits. Il est demandé de soigner la présentation.

Barème indicatif: Exercice 1 : 7 pts ; Exercice 2 : 3 pts ; Exercice 3 : 7 pts ; Exercice 4 : 3 pts.

Exercice 1 : Séries entières

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière

$$\sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{n(n-1)}.$$

2. Montrer que la somme S est de classe \mathcal{C}^2 sur $] -R, R[$ et que $S''(x) = \frac{1}{1-x}$.
3. En déduire la valeur de $S'(x)$ pour $x \in] -R, R[$.
4. En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout $x \in] -R, R[$,

$$\int_0^x -\ln(1-t) dt = x + (1-x) \ln(1-x).$$

5. En déduire la valeur de $S(x)$ pour $x \in] -R, R[$.
6. Montrer que la somme $S(x)$ est continue sur $[-R, R]$ (on pourra étudier la convergence normale).
7. Déterminer $S(R)$ et $S(-R)$.

Exercice 2 : Suites et séries de fonctions

Pour $n \geq 1$, on définit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{x}{x^2 + n^2}.$$

1. Déterminer le tableau de variations de f_n .
2. Etudier la convergence uniforme de la **suite** de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ sur \mathbb{R} .
3. Etudier la convergence normale de la **série** de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ sur \mathbb{R} .

Exercice 3 : Etude d'un système linéaire de suites récurrentes

Soit $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit les suites (u_n) et (v_n) par

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + v_n \\ v_{n+1} = u_n + 3v_n \end{cases}$$

avec les conditions initiales $u_0 = 1$ et $v_0 = 0$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est-elle inversible ? Justifier votre réponse.
2. La matrice A est-elle orthogonale ? Justifier votre réponse.
3. La matrice A est-elle diagonalisable ? Justifier votre réponse.
4. Déterminer les valeurs propres de A .

5. On pose $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrer que e_1 et e_2 sont des vecteurs propres de A .
6. Montrer que $X_0 = \alpha e_1 + \beta e_2$ où α et β sont des réels à déterminer.
7. Exprimer X_n en fonction de X_{n-1} et de A puis en fonction de X_0 et A^n .
8. En déduire X_n en fonction de α et β .
9. Déterminer u_n et v_n en fonction de n .

Exercice 4 : Répondre par vrai ou faux, et surtout **justifier avec précision** votre réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Attention, toute réponse sans justification ne sera pas prise en compte.

1. La matrice nulle est diagonalisable.
2. La forme $\varphi \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \right) = x_1 x_2 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + y_1 y_2$ définit un produit scalaire sur \mathbb{R}^2 .
3. L'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$ est convergente.

EPCM. Examen de rattrapage.
Durée 2h.

N.B. Les calculatrices, les documents et les téléphones portables sont interdits. Il est demandé de soigner la présentation.

Exercice 1 : Série entière Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{2+x^2}.$$

1. Déterminer le développement en série entière en 0 de f .
2. On note R le rayon de convergence. Que vaut R ?
3. La convergence de la série entière est elle normale sur $[-R/2, R/2]$?
4. La convergence de la série entière est elle normale sur $[-R, R]$?

Exercice 2 : Puissances d'une matrice

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

1. La matrice A est-elle inversible ? Justifier votre réponse.
2. Quelles sont les valeurs propres de A ?
3. Sans calculs supplémentaires, déterminer si la matrice A est diagonalisable. Justifier votre réponse.
4. Déterminer les espaces propres ?
5. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 : Répondre par vrai ou faux, et surtout **justifier avec précision** votre réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Attention, toute réponse sans justification ne sera pas prise en compte.

1. La matrice $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ est diagonalisable.
2. La forme $\varphi \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \right) = x_1x_2 + y_1y_2 - x_1y_2 - x_2y_1$ définit un produit scalaire sur \mathbb{R}^2 .
3. L'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^4 - 1} dt$ est convergente.