UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L2 PCP, OPTION CHIMIE, 2013–2014, TD 2

Equations différentielles du deuxième ordre à coefficients constants

1. Donner toutes les solutions des équations différentielles homogènes suivantes (quand l'intervalle n'est pas mentionné, on prendra $I = \mathbb{R}$).

Puis, le cas échéant, résoudre le problème de Cauchy correspondant aux valeurs initiales données.

On utilise ci-dessous diverses notations : c'est exprès.

(1) $u'' + 3u' + 3u = 0$.
(2) $y'' + y' - 2y = 0$. Valeurs initiales : $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
    Quelles sont les solutions de cette équation qui sont des fonctions bornées sur $[0, +\infty[$?
(3) $f''(t) - 3f'(t) + 2f(t) = 0$. Valeurs initiales : $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$.
(4) $x'' - 4x' + 3x = 0$.
(5) $f''(t) + 9f(t) = 0$. Valeurs initiales : $f(0) = 0$, $f'(1) = 3$.
    Peut-on trouver une solution telle que $f(0) = 0$, $f(\pi) = 1$?
    Peut-on trouver une solution telle que $f(0) = 0$, $f(2\pi) = 1$?
    Quelles sont les solutions telles que $f(0) = 0$, $f(2\pi) = 0$?
(6) $y'' - y' + 5y = 0$.
(7) $y'' - 2y' + y = 0$. Valeurs initiales : $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

2. On considère l'équation à coefficients variables

$$x^2y'' - 5xy' + 9y = 0, \quad x > 0.$$

Si on pose $t := \ln x$, et $z(t) := y(e^t)$, montrer que l'équation ci-dessus se ramène à une équation linéaire à coefficients constants que l'on résoudra, puis en déduire les solutions de l'équation d'origine.

Trouver toutes les solutions de l'équation $x^2y'' - 5xy' + 9y = x^3$ sur $]0, +\infty[$. Quelle sera la solution qui vérifiera $y(1) = 2$, $y'(1) = 0$?

3. Résoudre les équations différentielles suivantes (quand l'intervalle n'est pas mentionné, on prendra $I = \mathbb{R}$).

Puis, le cas échéant, résoudre le problème de Cauchy correspondant aux valeurs initiales données.

(1) $f''(t) - 3f'(t) + 2f(t) = te^{3t}$. Valeurs initiales : $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$.
(2) $x'' - 4x' + 3x = t + 1 + 4e^t + 2e^{-t}$.
(3) $y'' + y' - 2y = 8\sin(2x) + \cosh x$. Valeurs initiales : $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Indication : le cosinus hyperbolique est une combinaison d'exponentielles.
(4) $y'' - y' + 5y = e^x \sin(2x) + \cos x$.
(5) $y'' - 2y' + y = (x^2 + 1)e^x$. Valeurs initiales : $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
(6) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Pour quelles valeurs de $\omega \in \mathbb{R}_+^*$ les solutions de l'équation $y''(x) + \alpha^2 y(x) = \sin(\omega x)$ restent-elles bornées sur $\mathbb{R}$? Quand on a des solutions non bornées, on parle de phénomène de résonance.

(7) $y'' + y = \cos^3 x$. Indication : linéariser $\cos^3 x$, par exemple en l'exprimant comme $\left(\frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})\right)^3$.

4. Un poids qu'on suppose de masse 1 repose sur une surface horizontale et est accroché au bout d'un ressort de constante $k > 0$: la force (horizontale) exercée par le ressort vaut $F_1 = -kx$, si x est l'écart de position par rapport à la position du ressort au repos. La surface horizontale est rugueuse et inflige au poids une force de frottement proportionnelle à sa vélocité et de sens opposé : $F_2 = -\gamma x'(t)$.

(1) Dire pourquoi la position du point (supposé ponctuel) est gouvernée par l'équation différentielle $x'' + \gamma x + kx = 0$.
(2) Résoudre l'équation. Dire pour quelles conditions sur k, γ le mouvement sera oscillatoire (amorti) ou monotone.
(3) Résoudre le problème de Cauchy avec les valeurs initiales $x(0) = 1$ et $x'(0) = 0$ (départ arrêté) et $x(0) = 0$ et $x'(0) = 1$ (impulsion à partir de la position d'équilibre).
(4) On suppose que le poids est aussi relié à un moteur qui exerce sur lui une force $F_3 = \cos \omega t$ (oscillations forcées). Ecrire la nouvelle équation qui est satisfaite et la résoudre.

UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L2 PCP, OPTION CHIMIE, 2013–2014
MATHÉMATIQUES, TD 3

Equations différentielles du premier ordre

1. Donner toutes les solutions des équations différentielles suivantes (quand l'intervalle n'est pas mentionné, on prendra $I = \mathbb{R}$).

Puis, le cas échéant, résoudre le problème de Cauchy correspondant à la valeur initiale donnée.

(1) $y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 0$. Valeur initiale : $y(0) = 2$.

(2) $y' + \frac{\cos x}{\sin x}y = \cos x$, $I =]0, \pi[$. Valeur initiale : $y(\frac{\pi}{2}) = 1$.

Résoudre l'équation sur $J =]-\pi, 0[$. Peut-on trouver des fonctions $y \in \mathcal{C}^1(]-\pi, \pi[)$ qui soient solutions de l'équation $(\sin x)y' + (\cos x)y = \sin x \cos x$ sur cet intervalle ?

(3) $xy' + (1 + x)y = 0$ sur $I :=]0, +\infty[$. Valeur initiale : $y(1) = 1$.

(4) $y' + \left(\frac{1}{x} - 1\right) y = -\frac{2}{x}$ sur $I :=]0, +\infty[$.

(5) $y' + \frac{k}{x}y = 0$, où $k \in \mathbb{R}^*$, sur $I :=]0, +\infty[$. Valeur initiale : $y(1) = 3$.

Résoudre la même équation sur $J =]-\infty, 0[$. Peut-on trouver une solution sur $\mathbb{R}$ tout entier ? (il faudra discuter selon les valeurs de k).

(6) $(x^2 - 1)y' - 2xy = x(x^2 - 1)$ sur $I :=]-1, 1[$. Valeur initiale : $y(0) = 4$.

(7) $xy' + 2y = e^x$ sur $I :=]0, +\infty[$.

(8) $2xy' + y = x^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$, sur $I :=]0, +\infty[$.

2. Sur quels intervalles peut-on trouver des solutions de l'équation $2xy' + y = \frac{1}{1-x}$? Les calculer.

3. (Extrait d'un sujet de concours, session 2006).

On note (E) l'équation différentielle $|x|y' + (x - 1)y = x^2$.

a) Résoudre (E) sur $]0; +\infty[$.

b) Résoudre (E) sur $]-\infty, 0[$.

c) Existe-t-il des solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$? Si oui, les expliciter.

4. (Extrait d'un sujet de concours, session 2011). Le but de l'exercice est de résoudre l'équation différentielle

$$(E) \qquad xy' + y = \cos x.$$

On note f la fonction définie par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

(1) Démontrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

(2) Soit x un réel non nul. Calculer $xf'(x) + f(x)$. Que peut-on en déduire ?

(3) Résoudre l'équation différentielle (E) sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$.

(4) Résoudre l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.