UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L2 PCP, OPTION CHIMIE, 2013–2014
MATHÉMATIQUES, TD 5

Topologie de $\mathbb{R}^2$, Fonctions de plusieurs variables

1. Équivalence de normes sur $\mathbb{R}^2$.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq 2\|x\|_\infty$, et aussi que $\|x\|_2 \leq \sqrt{2}\|x\|_\infty$. Donner des exemples pour montrer qu'aucune de ces inégalités ne peut être améliorée.

2. Inégalité de Cauchy-Schwarz.

On rappelle que pour $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $x \cdot y := \sum_{i=1}^n x_i y_i$, et $\|x\|^2 = x \cdot x$.

Étudier le signe du polynôme en t donné par $P(t) = \|x + ty\|^2$, et en déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$(x \cdot y)^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2,$$

autrement dit

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

Pour quelles valeurs de x et y cette inégalité devient-elle une égalité ?

3. 1) Montrer que pour tous réels a, b, c, d tels que $a < b$ et $c < d$, alors l'ensemble $\Omega :=]a, b[\times]c, d[$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

2) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}^2$, pour tout $r > 0$, la boule ouverte $B(a, r)$ est ouverte (on peut prendre la “boule” au sens de n'importe quelle norme).

4. Montrer que si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $g : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ sont continues, alors $g \circ f$ est continue.

5. Étudier les limites suivantes (qui peuvent exister ou pas) :

(1) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$;

(2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$;

(3) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^4}{x^4+y^2}$;

(4) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$;

(5) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)^2}$.

6. Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ la fonction f définie par

$$f(x, y) := \frac{|xy|^\alpha}{x^2 + y^2}, \quad f(0, 0) = 0$$

est-elle bornée sur la boule $B((0, 0), 1)$? Continue sur cette même boule ?

7. (1) Trouver une équation de la droite $y = x$ en coordonnées polaires.
   (2) Trouver une équation du cercle de centre $(1, 0)$ et de rayon 1 en coordonnées polaires.
   (3) Trouver une équation de la droite $ax + by = 1$ en coordonnées polaires. Indication : calculer en fonctions de (a, b) les coordonnées polaires (ρ_0, θ_0) de l'unique point p_0 de cette droite qui est le plus proche de $(0, 0)$. Représenter la droite dans un repère centré en p_0, avec la droite passant par l'origine et par p_0 comme axe des abscisses.