Année 2013/2014 UNIVERSITÉ TOULOUSE 3

L2PCP - OPTION CHIMIE

MATHEMATIQUES

Feuille de TD 6

Exercice 1. Déterminer, pour les fonctions f suivantes de $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ dans $\mathbb{R}$, leur limite en $(0,0)$ lorsqu'elle existe.

1. $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$.
2. $f(x,y) = xy\log(x^2+y^2)$.
3. $f(x,y) = \frac{y^4}{x^2+y^4}$.
4. $f(x,y) = \frac{x^3-2xy+y^2}{x^2+y^2}$.
5. $f(x,y) = \frac{x\sin(xy)}{x^2+y^2}$.

Exercice 2. Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes.

1. La fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, donnée par $f(x,y) = e^x \sin y$.
2. La fonction g de $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ dans $\mathbb{R}$ donnée par $g(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$.
3. Calculer les dérivées partielles secondes de ces fonctions.

Exercice 3. Etudier en $(0,0)$ la continuité, la continuité par rapport à chacune des deux variables et l'existence des dérivées partielles de la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, telle que $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

Exercice 4. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ donnée par $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. En quels points f admet-elle des dérivées partielles?

Exercice 5. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ donnée par $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

1. Vérifier que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$.
2. Etudier la continuité de f en $(0,0)$.

Exercice 6. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = (x^2+y^2)^x$ si $(x,y) \neq 0$ et $f(0,0) = 1$.

1. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?
2. Déterminer les dérivées partielles de f en un point quelconque distinct de l'origine.
3. La fonction f admet-elle des dérivées partielles par rapport à x et y en $(0,0)$?

Exercice 7. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{x^2y+3y^3}{x^2+y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

1. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?
2. La fonction f admet-elle des dérivées partielles en $(0,0)$? Si oui, calculer ces dérivées.

3. La fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$?
4. Déterminer les dérivées partielles de f en tout point différent de $(0,0)$.
5. Déterminer l'équation du plan tangent au graphe de f, au point $(1,1,2)$.

Exercice 8. Soit f la fonction de $\mathbb{R}_+^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^y + y^x$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 1$.

1. On suppose tout d'abord que x et y sont strictement positifs. Montrer que f est différentiable en (x,y) et calculer ses dérivées partielles.
2. Soit $x > 0$, la fonction f est-elle continue en $(x,0)$? Admet-elle des dérivées partielles en ce point? Si oui, calculer ces dérivées.
3. Même question en $(0,y)$ pour $y > 0$.
4. Même question en $(0,0)$.

Exercice 9. Pour des entiers naturels $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, on considère la fonction F de $\mathbb{R}^k$ and $\mathbb{R}$ donnée par
$$F(x_1, \dots, x_k) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_k^{\alpha_k}.$$

1. Caculer les dérivées partielles de F par rapport à chacune des k variables $x_1, \dots, x_k$.
2. Caculer la somme S donnée par
$$S = \sum_{j=1}^{k} x_j \frac{\partial}{\partial x_j} F(x_1, \dots, x_k).$$
3. En déduire que pour tout polynôme P de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}$, homogène de degré n (c'est à dire que tous ses termes ont un degré total égal à n), on a la relation:
$$nP(x_1, \dots, x_k) = \sum_{j=1}^{k} x_j \frac{\partial}{\partial x_j} P(x_1, \dots, x_k).$$