L2PCP - OPTION CHIMIE

MATHEMATIQUES

Feuille de TD 7

Exercice 1. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ donnée par $f(x,y) = (x+y, xy)$ et h la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ donnée par $h(x,y) = \sin(xy)$. Calculer les dérivées partielles de f, h et $h \circ f$.

Exercice 2. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ donnée par $f(x,y) = (\sin(x+y), \sin(x-y))$ et g la fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ donnée par $g(x,y) = x/y$. Calculer les dérivées partielles de f et de g. Quel est le domaine de définition de $g \circ f$? Calculer les dérivées partielles de $g \circ f$ dans ce domaine.

Exercice 3. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, différentiable en $a \in \mathbb{R}^2$.

1. Montrer que pour $h \in \mathbb{R}^2$ tendant vers zéro,
$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + o(||h||),$$
les crochets désignant le produit scalaire.
2. On suppose que $\nabla f(a) \neq (0,0)$. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que pour tout $\epsilon \in (0,c)$,
$$f(a - \epsilon \nabla f(a)) < f(a) < f(a + \epsilon \nabla f(a)).$$
3. En déduire que si f admet un minimum ou un maximum local en a, alors $\nabla f(a) = (0,0)$.
4. On suppose que f est différentiable sur le disque unité fermé, et que f est nulle sur le bord de ce disque. Montrer qu'il existe a à l'intérieur du disque unité tel que $\nabla f(a) = (0,0)$.

Exercice 4. Calculer le gradient de la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, dans les cas suivants:

1. $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$.
2. $f(x,y) = y \exp(2x^2)$.
3. $f(x,y) = y^2 \exp(-x)$.

Exercice 5. Calculer, s'il existe, le gradient en $(0,0)$ de la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, dans les cas suivants:

1. $f(x,y) = xy \exp(\sqrt{|x+y|})$.
2. $f(x,y) = |x+y| \sin(x^2 + y)$.

Exercice 6. Pour trois réels a, b, c fixés, a et c étant non nuls, on considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, donnée par $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$.

1. Calculer le gradient de f en tout point de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer, en fonction de a, b, c, l'ensemble des points E pour lequel le gradient de f est nul. A quelle condition cet ensemble contient des points différents de $(0,0)$?
3. On suppose que $b^2 - 4ac < 0$. Déterminer le signe de $f(x,y)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$, et en déduire f admet un minimum local strict, ou un maximum global strict en $(0,0)$.

4. On suppose que $b^2 - 4ac > 0$. Montrer qu'il existe $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$, tels que $f(tx_1, ty_1) < 0 < f(tx_2, ty_2)$ pour tous $t > 0$. En déduire que f n'admet ni minimum local, ni maximum local.
5. On suppose que $b^2 - 4ac = 0$. Montrer que f admet un maximum ou un minimum global, atteint en tout point de E, et que f n'admet aucun autre extrêmum local.

Exercice 7. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, donnée par $f(x, y) = x^2 + y^3$.

1. Calculer le gradient de f en tout point de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer l'ensemble des points pour lesquels le gradient de f s'annule.
3. Montrer que f n'admet ni munimum local, ni maximum local.

Exercice 8. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, donnée par $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y$.

1. Calculer le gradient de f en tout point de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer l'ensemble des points pour lesquels le gradient de f s'annule.
3. Calculer $f(1 + t, 1 + u)$ en fonction de t et u.
4. En déduire que f admet un unique extrêmum local, qui est en fait un minimum global.

Exercice 9. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, donnée par $f(x, y) = x^2 + 6xy + 2y^2 - 6x + 10y - 2$.

1. Calculer le gradient de f en tout point de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer l'ensemble des points pour lesquels le gradient de f s'annule.
3. Calculer $f(-3 + t, 2 + u)$ en fonction de t et u.
4. En déduire que f n'admet ni minimum local, ni maximum local.

Exercice 10. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, donnée par $f(x, y) = \sin x + y^2 - 2y + 1$.

1. Calculer le gradient de f en tout point de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer l'ensemble des points pour lesquels le gradient de f s'annule.
3. Ecrire un développement limité de f au voisinage de chacun de ces points.
4. Déterminer l'ensemble des extrêmas locaux de f.