Année 2013/2014 UNIVERSITÉ TOULOUSE 3

L2PCP - OPTION CHIMIE
MATHEMATIQUES
Feuille de TD 8

Exercice 1. On considère la fonction f à deux variables donnée par $f(x,y) = \log(1 - x^2 - y^2)$.

1. Déterminer l'ensemble D des points de $\mathbb{R}^2$ pour lesquels f peut être définie: on suppose que f est effectivement définie sur tout D (D est appelé le *domaine de définition de* f).
2. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f en tout point de D, et vérifier le théorème de Schwarz.

Exercice 2. On considère la fonction f à deux variables donnée par $f(x,y) = \sqrt{y^2 - x^4}$.

1. Déterminer l'ensemble D des points de $\mathbb{R}^2$ pour lesquels f peut être définie: on suppose que f est effectivement définie sur tout D.
2. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f en tout point de D, et vérifier le théorème de Schwarz.

Exercice 3. Pour deux entiers positifs m et n, on considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, donnée par $f(x,y) = x^m y^n$.

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f, et vérifier le théorème de Schwarz.
2. En déduire que le théorème de Schwarz est vrai pour les dérivées secondes de toute fonction polynômiale à deux variables.

Exercice 4. On considère la fonction f à deux variables donnée par $f(x,y) = x[\log^2(x) + y^2]$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f.
2. Calculer les dérivées partielles de f d'ordre 1 et 2 en tout point de D.
3. Calculer les *points critiques* de f, c'est à dire les points où le gradient de f s'annule.
4. Déterminer, parmi ces points critiques, ceux qui sont des minimum locaux, ceux qui sont des maximum locaux et ceux qui sont des points-selles.

Exercice 5. On considère une fonction f de $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ qui est harmonique, c'est à dire qu'elle est de classe $\mathcal{C}^2$ et que son Laplacien est identiquement nul. On suppose de plus que f est à symétrie radiale, c'est à dire qu'il existe une fonction g de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$, telle que $f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = g(\rho)$ pour tous $\rho > 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$.

1. Exprimer le Laplacien de f en $(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$, en fonction des deux premières dérivées de g.
2. Calculer la dérivée par rapport à ρ de $\rho g'(\rho)$.
3. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $g(\rho) = C\log\rho$.
4. Vérifier, sans passer par les coordonnées polaires, que la fonction $(x,y) \mapsto \log(x^2 + y^2)$ est bien harmonique sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

Exercice 6. Soit $B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ la boule unité.

1. Pour (x,y) dans le disque unité D ($x^2 + y^2 \leq 1$), calculer les valeurs $m_{x,y}$ et $M_{x,y}$ telles que $(x,y,z) \in B$ si et seulement si $m_{x,y} \leq z \leq M_{x,y}$.

2. Le volume de B est égal à l'intégrale double:

$$V := \int\int_D (M_{x,y} - m_{x,y})dxdy.$$

En utilisant le passage aux coordonnées polaires, montrer que

$$V = 4\pi \int_0^1 r\sqrt{1-r^2}dr.$$

3. Montrer que $V = 4\pi/3$.

Exercice 7. Pour $A > 0$, on note $I_A = \int_{-A}^{A} e^{-x^2/2}dx$, et pour un ouvert D de $\mathbb{R}^2$, on pose $J_D = \int\int_D e^{-x^2/2-y^2/2}dxdy$. On admet que $J_D \leq J_{D'}$ si D est inclus dans D'. On note D_A le disque de centre $(0,0)$ et de rayon A, C_A le carré de côté $2A$, centré en $(0,0)$, dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées.

1. Calculer J_{C_A} en fonction de I_A et en déduire que $\sqrt{J_{D_A}} \leq I_A \leq \sqrt{J_{D_{2A}}}$.
2. Calculer J_{D_A} et montrer que cette quantité converge vers 2π quand A tend vers l'infini.
3. En déduire que
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx = \sqrt{2\pi}.$$

Exercice 8. Pour tout $u > 0$, on pose

$$\Gamma(u) = \int_0^\infty e^{-x}x^{u-1}dx.$$

On admettra que cette intégrale converge.

1. Montrer que pour tous $u, v > 0$,
$$\Gamma(u)\Gamma(v) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x-y}x^{u-1}y^{v-1}dxdy.$$
2. En effectuant un changement de variables adéquat, en déduire que
$$\Gamma(u)\Gamma(v) = \int_0^\infty \int_0^1 e^{-\alpha}(\alpha\beta)^{u-1}(\alpha(1-\beta))^{v-1}\alpha d\alpha d\beta.$$
3. En déduire que
$$\int_0^1 \beta^{u-1}(1-\beta)^{v-1}d\beta = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}.$$
4. Calculer le membre de gauche de cette égalité pour $u = v = 1/2$ et en déduire la valeur de $\Gamma(1/2)$.